多部門モデルの黄金律と労働価値説

金　江　　　亮

はじめに

金江[2022]では，消費財生産部門，資本財生産部門が多数あり，すべての生産関数が１次同次のコブ・ダグラス型生産関数で，本源的生産要素が労働のみで，資本をすべてフローとした場合に，各財の生産量が労働に比例するという意味での労働価値説を数理的に証明した。しかし，そもそも価格や，財の生産に直接間接に必要な投下労働量＝価値は考慮外であった。

また，金江[2023]では，ソローモデルの黄金律，すなわち定常状態の中でも特に消費量最大となる場合には，限界原理に基づく価格と，直接間接に必要な投下労働量である価値が完全に一致するという狭い意味での労働価値説が成り立っていることを証明した。

では，この２つを組み合わせて考えて，１次同次の生産関数からなる新古典派的な多部門モデルの黄金律において，限界原理・最適化行動に基づく価格と，価値が比例するという狭い意味での労働価値説は成り立っているだろうか？

本稿では最初に，ソローモデルは，最終生産物が投資にも消費にも使えるという点で，マルクスの２部門モデルでなく，通常，労働価値説と結びつけて論じられることはないが，本源的生産要素が労働のみという，これまでのマルクス派最適成長論の前提としていた仮定が成り立っていることを確かめる。

次に，消費財・資本財の２部門モデルの場合で，その後資本財ｎ部門・消

キーワード：労働価値説，限界原理，１次同次，価値，資本蓄積の黄金律

費財m部門の多部門モデルの場合に，黄金律に相当する消費量最大化の最適化の定常状態で，価値と価格が一致する労働価値説が成り立つことを示す。

ソローモデル

金江[2023]で取り上げたソローモデルの黄金律と労働価値説について，簡単に振り返っておく。ソローモデルは，以下のように定式化できる。

消費量最大化問題　$\max C$

s. t.

$$Y = F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$
$$Y = C + I$$
$$\dot{K} = I - \delta K$$
$$I = sY$$
$$\dot{K} = 0$$

K：資本
L：労働（定数）
Y：最終生産物
I：投資
s：貯蓄率（$0 \le s \le 1$）
C：消費財
δ：減価償却率（$0 \le \delta \le 1$）
$\dot{K}$：Kの時刻tでの微分
$F(K, L)$：1次同次生産関数

初期資本K_0は労働のみで作られているとは言えないが（それは2部門コブ・ダグラス型マルクス派最適成長モデルでも同じ)，ごく小さい値(例えば0.0001)から出発した，と思えば，ソローモデルもよくよく見れば労働が唯一の本源的生産要素のモデルと思える。初期資本と労働で，最終生産物を生産する。それを資本蓄積と消費に回す。

ごく小さい値から出発したという想定は恣意的に思えるかもしれないが，資本蓄積の式$\dot{K} = I - \delta K$は，時刻tを負の値に遡ることも形式上できて，そうすると無限に遡ればいくらでも小さくできる。そう考えると，限り

なく労働のみで生産されているとみなすこともできる。

この考え方は，金江[2013]で資本財・消費財が2部門ともにコブ・ダグラス型のマルクス派最適成長論のモデルで，本源的生産要素が労働のみとみなしたのと基本的に同じである。

このソローモデルの黄金律において，価値と価格が一致することを金江[2023]で示したが，ここでいう価格は限界原理に基づいた価格であり，新古典派の枠組みの価格と，マルクスの投下労働価値が一致しているというのが帰結であった。

以下では，これがソローモデルでなく，2部門モデルや多部門モデルでも成り立つことを示す。

2部門モデル

2部門モデルは，以下のように定式化される。

$$\max_{Y} U(Y)$$
$$s.t.$$
$$\dot{K} = G(K_1, L_1) - \delta K$$
$$Y = F(K_2, L_2)$$
$$K_1 + K_2 = K$$
$$L_1 + L_2 = L(= const.)$$
$$K_1, K_2, L_1, L_2 \geq 0$$
$$\dot{K} = 0$$

K：資本
K_1：資本財部門に配分される資本
K_2：消費財部門に配分される資本
L：労働（定数）
L_1：資本財部門に配分される労働
L_2：消費財部門に配分される労働
Y：消費財
$U(Y)$：消費財Yから得られる効用
δ：減価償却率（$0 \leq \delta \leq 1$）
$\dot{K}$：Kの時刻tでの微分
$G(K_1, L_1)$：資本財部門の1次同次生産関数
$F(K_2, L_2)$：消費財部門の1次同次生産関数

ソローモデルにおける黄金律は，定常状態において消費量最大化の状態である。そのため，さきほどと同じく追加的な条件として$\dot{K} = 0$が入ってい

る。これは，マルクス派2部門モデルにおける黄金律だと考えることができる。

ラグランジアンを以下のようにおく。

$$\Omega = U(Y) + p_1(G(K_1, L_1) - \delta K) + p_2(F(K_2, L_2) - Y) \\ + R(K - K_1 - K_2) + w(L - L_1 - L_2)$$

なお，ラグランジュ乗数は経済学的には以下のように解釈できる。

効用単位で測って

p_1：資本財価格

p_2：消費財価格

R：資本レンタル

w：（名目）賃金率

1階条件を求める。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Omega}{\partial Y} = 0 & \Leftrightarrow U'(Y) = p_2 \\ \dfrac{\partial \Omega}{\partial K_1} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial K_2} = 0 & \Leftrightarrow R = p_1 G_K = p_2 F_K \\ \dfrac{\partial \Omega}{\partial L_1} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial L_2} = 0 & \Leftrightarrow w = p_1 G_L = p_2 F_L \\ \dfrac{\partial \Omega}{\partial K} = 0 & \Leftrightarrow R = p_1 \delta \end{cases} \tag{1}$$

(1)から，$p_1, p_2, R, w, K_1, K_2, L_1, L_2$ などの8つの変数は値が決まることに注意する。(1)は6つの等式であり，$K_1 + K_2 = K, L_1 + L_2 = L$ と合わせて等式はすべてで8つであるからである。

また，生産関数は1次同次だからオイラーの定理より

$$G(K_1, L_1) = G_K K_1 + G_L L_1$$
$$F(K_2, L_2) = F_K K_2 + F_L L_2$$

が成り立っていることに注意すると，以下の式が成り立つことが分かる。

$$\begin{cases} p_1\delta K = RK_1 + wL_1 \\ p_2 Y = RK_2 + wL_2 \end{cases} \tag{2}$$

次に，価値方程式を求める。

v_1：資本財１単位の価値

v_2：消費財１単位の価値

とする。

生産に使用される資本財は，減価償却分だけ生産物に価値が移転する，として価値方程式は以下となる。

$$\begin{cases} v_1\delta K = v_1\delta K_1 + L_1 \\ v_2 Y = v_1\delta K_2 + L_2 \end{cases} \tag{3}$$

(2)(3)が一致することを，これから示す。

(2)の両辺をwで割って労働単位にして,(1)を用いると

$$\begin{cases} \dfrac{p_1}{w}\delta K = \dfrac{p_1}{w}\delta K_1 + L_1 \\ \dfrac{p_2}{w} Y = \dfrac{p_1}{w}\delta K_2 + L_2 \end{cases} \tag{4}$$

(3)(4)の上式より $v_1 = \dfrac{p_1}{w} = \dfrac{L_1}{\delta(K-K_1)}$ であり，これから $v_2 = \dfrac{p_2}{w}$ や $v_1\delta = \dfrac{R}{w}$ であることも分かる。

まとめると， $v_1 = \dfrac{p_1}{w}, v_2 = \dfrac{p_2}{w}, v_1\delta = \dfrac{R}{w}$ となり，価値と価格が完全に一致していることが分かる。それぞれ，左辺は投下労働量，右辺は支配労働量になっている。特に，定常状態においては減価償却分の価値は，レンタルの支配労働量と一致している。

ここで注意しないといけないのは，ソローモデルの場合もそうであったが，単に定常状態というだけでは価値と価格が一致するわけでなく，消費量最大化の黄金律の状態，すなわち最適化行動の結果として労働価値説が成立している。つまり，１次同次の新古典派生産関数で考える限り，価値と価格

が一致するという意味での労働価値説は最適化の結果として成り立つことが分かる。

計算上は，最適化行動のあるなしに関わらず，投入・産出の物量と生産関数から価値を求めることはできるが，それは価格とは一致しない。

多部門モデル

金江[2022]では，消費財・資本財が多部門の定式化であった。このモデルでも，同じ結果が成り立つ。繰り返しになるため，簡単に書く。

$$\max_{Y} U(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)$$

$$s.t.$$

$$\dot{K}_1 = G_1(K_{11}, K_{21} \cdots, K_{n1}, L_1) - \delta_1 K_1$$

$$\dot{K}_2 = G_2(K_{12}, K_{22} \cdots, K_{n2}, L_2) - \delta_2 K_2$$

…………………………………………………

$$\dot{K}_i = G_i(K_{1i}, K_{2i} \cdots, K_{ni}, L_i) - \delta_i K_i$$

…………………………………………………

$$\dot{K}_n = G_n(K_{1n}, K_{2n} \cdots, K_{nn}, L_n) - \delta_n K_n$$

$$Y_1 = F_1(K_{1,n+1}, K_{2,n+1} \cdots, K_{n,n+1}, L_{n+1})$$

$$Y_2 = F_2(K_{1,n+2}, K_{2,n+2} \cdots, K_{n,n+2}, L_{n+2})$$

…………………………………………………

$$Y_{i'} = F_{i'}(K_{1,i'}, K_{2,i'} \cdots, K_{n,i'}, L_{n+i'})$$

…………………………………………………

$$Y_m = F_m(K_{1,n+m}, K_{2,n+m} \cdots, K_{n,n+m}, L_{n+m})$$

$$K_{11} + K_{12} + \cdots + K_{1n} + K_{1,n+1} + \cdots + K_{1,n+m} = K_1$$

$$K_{21} + K_{22} + \cdots + K_{2n} + K_{2,n+1} + \cdots + K_{2,n+m} = K_2$$

…………………………………………………

K ：資本

K_{ij}：第 j 資本財部門に配分される第 i 資本財

$K_{i,n+j'}$：第 j' 消費財部門に配分される第 i 資本財

K_i ：第 i 資本財

L ：労働（定数）

L_i ：第 i 資本財部門に配分される労働

$L_{n+i'}$：第 i' 消費財部門に配分される労働

Y ：消費財

$U(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)$ ：消費財 Y_1, Y_2, …, Y_m から得られる効用

δ_i ：第 i 資本財の減価償却率（$0 \leq \delta_i \leq 1$）

$\dot{K}$ ：K の時刻 t での微分

G_i ：第 i 資本財部門の 1 次同次生産関数

$F_{i'}$ ：第 i' 消費財部門の 1 次同次生産関数

$$K_{i1}+K_{i2}+\cdots+K_{in}+K_{i,n+1}+\cdots+K_{i,n+m}=K_i$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K_{n1}+K_{n2}+\cdots+K_{nn}+K_{n,n+1}+\cdots+K_{n,n+m}=K_n$$

$$L_1+L_2+\cdots+L_n+L_{n+1}+\cdots+L_{n+m}=L(=const.)$$

$$K_{ij},L_j\geq 0\quad(1\leq i\leq n,1\leq j\leq n+m)$$

$$\dot{K}_i=0\qquad(1\leq i\leq n)$$

ラグランジアンを以下のようにおく。

$$\begin{aligned}\Omega=&U(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)\\&+\sum_{i=1}^{n}p_i\left\{G_i(K_{1i},K_{2i}\cdots,K_{ni},L_i)-\delta_iK_i\right\}\\&+\sum_{i'=1}^{m}p_{n+i}\left\{F_{i'}(K_{1,i'},K_{2,i'}\cdots,K_{n,i'},L_{n+i'})-Y_{i'}\right\}\\&+\sum_{i=1}^{n}R_i\left(K_i-\sum_{j=1}^{n+m}K_{i,j}\right)\\&+w\left(L-\sum_{i=1}^{n+m}L_i\right)\end{aligned}$$

なお，ラグランジュ乗数は経済学的には以下のように解釈できる。

p_i：第 i 資本財価格

$p_{n+i'}$：第 i' 消費財価格

R_i：第 i 資本財のレンタル

w：（名目）賃金率

効用単位と思っても円単位と思ってもよいのは，2部門モデルの場合と同様である。

1階条件を求める。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Omega}{\partial Y_i}=0 \Leftrightarrow p_{n+i}=\dfrac{\partial U}{\partial Y_i} & (1\le i\le m) \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial K_{ij}}=0 \Leftrightarrow R_i=p_j\dfrac{\partial G_j}{\partial K_i}=p_{n+i'}\dfrac{\partial F_{i'}}{\partial K_i} & (1\le i,j\le n, 1\le i'\le m) \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial L_i}=0 \Leftrightarrow w_i=p_j\dfrac{\partial G_j}{\partial L_i}=p_{n+i'}\dfrac{\partial F_{i'}}{\partial L_i} & (1\le i,j\le n, 1\le i'\le m) \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial K_i}=0 \Leftrightarrow R_i=p_i\delta_i & (1\le i\le n) \end{cases} \tag{5}$$

これから，以下の価格方程式が成り立つ。

$$\begin{cases} p_j\delta_jK_j=\sum_{i=1}^{n}R_iK_{ij}+wL_j & (1\le i,j\le n) \\ p_{n+i'}Y_{i'}=\sum_{i=1}^{n}R_iK_{i,n+i'}+wL_{n+i'} & (1\le i\le n, 1\le i'\le m) \end{cases} \tag{6}$$

また，価値方程式は以下となる。

$$\begin{cases} v_j\delta_jK_j=\sum_{i=1}^{n}v_i\delta_iK_{ij}+L_j & (1\le i,j\le n) \\ v_{n+i'}Y_{i'}=\sum_{i=1}^{n}v_i\delta_iK_{i,n+i'}+L_{n+i'} & (1\le i\le n, 1\le i'\le m) \end{cases} \tag{7}$$

行列で(7)の上式を書き直すと，

$$\begin{bmatrix} \delta_1(K_1-K_{11}) & \cdots & -\delta_jK_{j1} & \cdots & -\delta_nK_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\delta_1K_{1j} & \cdots & \delta_j(K_j-K_{jj}) & \cdots & -\delta_nK_{nj} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\delta_1K_{1n} & \cdots & -\delta_jK_{j1} & \cdots & \delta_n(K_n-K_{nn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \tag{8}$$

また，(6)を賃金率wで割って，(5)の最下式を用いると

$$\begin{cases} \dfrac{p_j}{w}\delta_j K_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i \delta_i}{w} K_{ij} + L_j & (1 \le i, j \le n) \\ \dfrac{p_{n+i'}}{w} Y_{i'} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i \delta_i}{w} K_{i,n+i'} + L_{n+i'} & (1 \le i \le n, 1 \le i' \le m) \end{cases} \tag{9}$$

行列で(9)の上式を書き直すと

$$\begin{bmatrix} \delta_1(K_1 - K_{11}) & \cdots & -\delta_j K_{j1} & \cdots & -\delta_n K_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\delta_1 K_{1j} & \cdots & \delta_j(K_j - K_{jj}) & \cdots & -\delta_n K_{nj} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\delta_1 K_{1n} & \cdots & -\delta_j K_{j1} & \cdots & \delta_n(K_n - K_{nn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{p_1}{w} \\ \vdots \\ \frac{p_j}{w} \\ \vdots \\ \frac{p_n}{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \tag{10}$$

(8)(10)から，係数行列が正則のとき

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_1}{w} \\ \vdots \\ \frac{p_j}{w} \\ \vdots \\ \frac{p_n}{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1(K_1 - K_{11}) & \cdots & -\delta_j K_{j1} & \cdots & -\delta_n K_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\delta_1 K_{1j} & \cdots & \delta_j(K_j - K_{jj}) & \cdots & -\delta_n K_{nj} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\delta_1 K_{1n} & \cdots & -\delta_j K_{j1} & \cdots & \delta_n(K_n - K_{nn}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$$

となり，またこれと(7)(9)の下式から，$v_{n+i'} = \dfrac{p_{n+i'}}{w}\ (1 \le i' \le m)$ であることも導かれる。

$$\text{結局,}\ v_i = \frac{p_i}{w}, v_{n+i'} = \frac{p_{n+i'}}{w}, v_i \delta_i = \frac{R_i}{w}\ (1 \le i \le n, 1 \le i' \le m) \tag{11}$$

となり，価値と価格は一致する。

正則でないときはもちろん，(11)は導けないが，その場合でも逆に(11)が成り立つならば(6)(7)は一致するので(11)は価値方程式と価格方程式が一致

するための十分条件にはなっている。また，現実経済では価格は存在することから正則行列になっているはずなので，最初から正則と仮定しておいてもよいだろう。

結語

金江[2013]第10章では，ラムゼーモデルにおいて，時間選好率 ρ が0に近いほど，定常状態で価値と価格との乖離が0に近づくことを示している。本稿でのすべてのモデルの黄金律は，時間選好率 ρ を0とした状態“のようなもの”と思えば，価値と価格が一致していることは自然な結果である。

金江[2022]での多部門モデルにおいて成立すると示された労働価値説は，あくまで各財の生産量が投下労働量に比例するということだけで，最適化行動は全く前提とされておらず，またそもそも，価格と価値の式を立てて求めることもしていなかった。つまり，通常とは異なった定義の労働価値説であった。

本稿のモデルは，定常状態における消費量最大化という最適化の条件という制約を課す代わりに，限界原理に基づく価格と，その財の生産に直接間接に必要な投下労働量である価値が比例するという通常の，狭い意味での労働価値説が成り立っていることを示せたのが新しい点である。

ただし，係数行列が正則としたが，正則の条件は一般に満たされるだろうとはいえ，数学的に検討する余地は残っている。

また，本稿では狭い意味での労働価値説は黄金律という限定された条件でしか成り立たないということを示したとも言えるが，これを黄金律や定常状態，時間選好率 ρ が正といったもっと一般的な条件下で，価値の定義を修正することで，価値と価格が一致することを示せることを探るのが，今後の検討課題である。

参考文献

石山健一[2016]「第3章ソロー成長モデル」國士舘大學政經論叢第28巻第3号，国士舘大学政経学会。

大西広[2020]『マルクス経済学 第3版』慶應義塾大学出版会。

置塩信雄[2004]『経済学と現代の諸問題―置塩信雄のメッセージ』大月書店。

金江亮[2013]『マルクス派最適成長論』京都大学学術出版会。

金江亮[2022]「固定係数でない多部門モデルにおける労働価値説」桃山学院大学経済経営論集第64巻第3号，pp. 79−92。

金江亮[2023]「ソローモデルと労働価値説」桃山学院大学経済経営論集第64巻第4号，pp. 497−504。

ロバート・M. ソロー，福岡正夫(訳)[2000]『成長理論 第2版』岩波書店。

R. J. バロー/X. サラ-イ-マーティン，大住圭介(訳)[2006]『内生的経済成長論 I [第2版]』九州大学出版会。

Hiroshi Onishi,Shunya Yoshii [2019] “A Proof of Labor Theory of Value Based on Marginalist Principle.” World Review of Political Economy volume 10, Issue 1.

Ramsey, Frank [1928] “A Mathematical Theory of Saving.” Economic Journal, 38, December, 543−559.

（かなえ・りょう／経済学部准教授／2023年9月22日受理）

Golden Rule of a Multi Sector Model and Labor Theory of Value

Ryo Kanae

Kanae [2022] mathematically proved the labor value theory in the sense that the output of each good is proportional to labor when there are many consumption goods production sectors and capital goods production sectors, when all production functions are linear homogeneous Cobb-Douglas type, and when the only primary production factor is labor and all capital is a flow. However, it did not take into account the price or the amount of labor invested, which is directly or indirectly necessary for the production of the good, or its value.

Kanae [2023] also proved that in the golden rule of the Solow model, i.e., in the steady state, especially when consumption is at a maximum, the theory of labor value in the narrow sense that price, based on the marginal principle, and value, which is the amount of directly and indirectly necessary invested labor, are perfectly consistent.

So, considering the two in combination, does the labor theory of value hold in the narrow sense that value is proportional to price based on the marginal principle and optimization behavior in the golden rule of the neoclassical multi-sector model consisting of linear homogeneous production functions?

In this paper, we first confirm that the Solow model is not Marx's two-sector model in that the final product can be used for both investment and consumption, and is not usually discussed in connection with the labor value theory, but the assumption that the only primary factor of production is labor, which has been the assumption of the Marxist optimal growth theory so far, does hold. We confirm that the assumption of Marxian optimal growth theory that the only primary factor of production is labor holds.

Next, in the case of the two-sector model of consumption and capital goods, and then in the case of the multisector model of n sectors of capital goods and m sectors of consumption goods, we show that the labor value theory, in which value and price coincide in the steady state of optimization of consumption maximization corresponding to the golden rule, is valid.