

Cobb-Douglas 型生産関数の fit の良さと限界生産力仮説*

西 川 憲 二

I 生産関数とは何か

実物経済分析において、「生産関数」の設定は不可欠であると信じられている。しかも、設定される生産関数は、Cobb-Douglas 型であるか、その「双生児」ともいふべき CES 生産関数や CEDD 生産関数とでほとんどを占める。Cobb-Douglas 型は簡便で一見もっともらしいことから理論モデルで多用され、他方、CES や CEDD 生産関数は Cobb-Douglas 型を包含することから「より一般的な」生産関数の型を特定するために計量分析で用いられている¹⁾。

それでは、集計（マクロ）生産関数はどのような役割を果たしているのだろうか。一般に、集計生産関数に期待されているものは、「成果としての産出量 Q が、どのような労働量 L と資本ストック量 K の組み合わせ投入から生産できるのか、という「物的」数量関係 $Q = F(L, K)$ である²⁾。しかし、 $Q = F(L, K)$ という形で表現できるためには、①物理的に異なる（異質な）各生産物を、単一の指数 Q へ「物的」集計できるのかという基本的問題がある³⁾。このことは、労働力、資本ストックにおいても同様であるが、資本

* 拙稿は金曜セミナー（大阪市立大学の瀬岡吉彦教授主催）で発表され参加された教員・大学院生、また別途に服部容教教授（大阪市立大学）並びに本学の荒木英一氏から有益なアドバイスを頂いた。ここに記して感謝する。

- 1) CEDD とは、Constant Elasticity of Derived Demand Production Function の略称である（佐藤隆三「経済成長の理論」1968、参照）。
- 2) 最近では、中間投入物（エネルギー、他部門からの原材料）も考慮されるようになった。
- 3) 冷蔵庫とトラックをどのようにしたら物理的に集計できるのだろうか。これは経済理論における集計問題であり、指数問題である。

ストックでの問題は深刻である。②もうひとつは、集計された K と集計された L に分離された形として $Q=F(L, K)$ と書けるためには Leontief の Separability 条件が必要である。実際の経済が、この Separability 条件を満たしていると想定するのは非現実的であり容認されないことは一連の F. M. Fisher の論文により示された。理論的観点からこれらの障害が致命的（死亡宣告）であることは、F. M. Fisher, J. Robinson, Morishima のみならず、Solow, Samuelson, Stiglitz, Uzawa, 等も了解するところである⁴⁾。それにも拘らず、「現実近似としてならば、Cobb-Douglas 型生産関数を用いることが可能である」という立場をとる研究者がいる。この超越的利用者のよりどころは、突き詰めると唯一点、Cobb-Douglas 型生産関数の「計量的 fit の良さ」である⁵⁾。Solow が F. M. Fisher に語った「もし、Cobb-Douglas 型生産関数をもちいた推定で労働分配率が25%、資本分配率が75%という逆の結果をえていたならば、いま我々は集計生産関数というようなものを議論していなかっただろう」(F. M. Fisher, 1971) は、その象徴である。

以下では、「限界生産力仮説」を意識しながら、Cobb-Douglas 型生産関数の fit の良さは何に基づいているのかを検討する。ここで「限界生産力仮説」を問題とするのは、この仮説が、分配率、技術進歩、経済成長等の経済学の主要課題を、生産関数の型や生産要素の限界代替率の問題に矮小化し形骸化させてきたこと、最近の技術進歩の理論と計測が Cobb-Douglas 型生産関数の安易な拡張をもちいてなされている⁶⁾、と考えるからである。

II Cobb-Douglas 型生産関数の定義

生産物、労働、資本そして各マイクロ生産関数における「異質」性から、「集

4) 例えば、佐藤和夫「生産関数の理論」p. 25の〔注6〕を参照されたい。なお、集計生産関数が、理論的にどのような限定範囲でなら適用可能かということは、F. M. Fisher, 佐藤和夫, 等が追求している。

5) Fisher, F. M., R. M. Solow and J. M. Kearl (1977) 参照。

6) 一例として、労働単位を効率単位で測定すること、人的資本ストックを Cobb-Douglas 型生産関数に組み込む等である。Mankiw 他 (1992) 参照。

計」された Cobb-Douglas 型生産関数が成立することには理論的現実性がない。それにもかかわらず、この理論的現実性をもたない集計 Cobb-Douglas 型生産関数の計量的 fit が良いのはなぜかという、Cobb-Douglas 型生産関数についての最後に残された問題をここでは議論する。以下では、説明の簡単化のため、生産物 Q 、労働 L 、資本 K についての同質性 homogeneity を前提する。

はじめに、ここで用いる関数の呼びかたを次のように定義する。制約条件の緩い順に、「3次元平面関数」、「Cobb-Douglas 型関数」、「Cobb-Douglas 型生産関数」である。これと関連して、「所得」関数と「生産」関数の使い分けにも注意されたい。3次元平面関数の中で、単に「Cobb-Douglas 型関数」というときは、

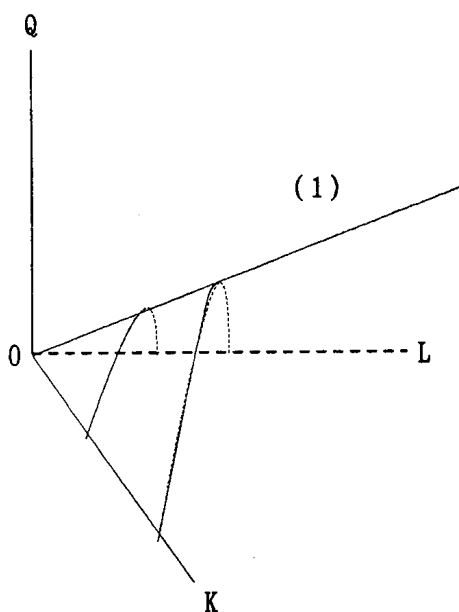
$$(1) \quad Q = AL^B K^C \quad \text{ただし、} B+C=1$$

$$(1)' \quad \log Q = \log A + B \log L + C \log K \quad \text{ただし、} B+C=1$$

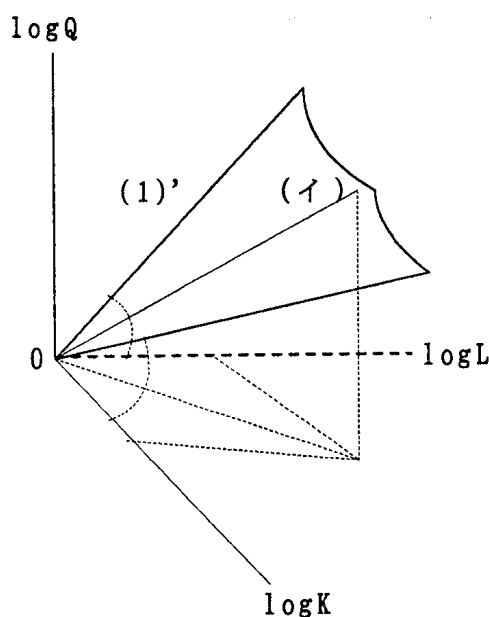
において係数 $B+C=1$ を意味する。次に、「Cobb-Douglas 型生産関数」とは、係数 B が労働分配率、 C が資本分配率に近似する場合をいう。

(1)と(1)'の Cobb-Douglas 型関数の空間イメージは、それぞれ

第1図



第2図



となる。第1図は、原点 O に右から突き刺さった円錐の上半分の表面であ

り、第2図の対数変数軸では、原点 O に右上方から三角平面が突き刺さった形（ここでは「正」象限だけで、 $A=1$ の場合）になっている。

さて、 B が労働分配率、 C が資本分配率となることが「限界生産力仮説」信奉者にとって特別な意義をもつ。というのは、労働 L と資本 K の各要素の限界生産力は、

$$\partial Q/\partial L = ABL^{B-1}K^C = ABL^B K^C L^{-1} = BQ/L$$

$$\partial Q/\partial K = C(Q/K)$$

となる。価格が完全競争のもとでの利潤最大化から決定されると仮定すると、各要素の実質価格は当該限界生産力 ($\omega/P_Q = \partial Q/\partial L, \gamma/P_Q = \partial Q/\partial K$) に等しくなるので、各財 (Q, L, K) の価格を (P_Q, ω, γ) とすると、

$$B = \omega L/P_Q Q = \text{労働分配率}$$

$$C = \gamma K/P_Q Q = \text{資本分配率} \quad \text{ただし、} B+C=1$$

となる。計量分析から、推定値 \hat{B} が実績値労働分配率に等しくなり、推定値 \hat{C} が実績値資本分配率（この時には $\hat{B} + \hat{C} = 1$ ）に等しいという結果を得ることができるならば、要素報酬（価格）あるいは分配率は「技術的な物的生産関数から導かれる限界生産力によって決定される」という仮説が意味をもつ。このことは経済理論からみると、要素報酬あるいは分配率は経済問題というよりも生産技術問題として捉えられることができ、両者は全く異なる経済学になっていくのである。

Ⅲ Cobb-Douglas 型生産関数とクロス・セクション・データ分析

1. 3次元平面関数から3次元「対数」平面関数への近似

まず議論を所得恒等式から始めよう。国民所得統計でみられるように、総所得 Y は総賃金所得 W と総資本所得 R からなる。同様に、分解された個別の産業・企業の当該データ ($J=1, \dots, j, \dots, n$) も

$$(2) \quad Y_j = W_j + R_j \quad \forall j \in J$$

という関係にある。今、上式を連続関数として近似すると、

$$dY_J/dJ = dW_J/dJ + dR_J/dJ$$

$$(dY_J/dJ)/Y_J = B_J(dW_J/dJ)/W_J + (1-B_J)(dR_J/dJ)/R_J$$

$$\text{ただし, } B_J \equiv (W_J/Y_J)$$

となる。労働分配率 B_J が変化することに注意して、1 から j まで定積分すると、

$$\int_1^j \{(dY_J/dJ)/Y_J\} dJ = \int_1^j \{B_J(dW_J/dJ)/W_J\} dJ \\ + \int_1^j \{(1-B_J)(dR_J/dJ)/R_J\} dJ$$

$$\log Y_j - \log Y_1 = \int_1^j B_J \{(dW_J/dJ)/W_J\} dJ \\ + \int_1^j (1-B_J) \{(dR_J/dJ)/R_J\} dJ$$

となる。さらに、部分積分すると、

$$\log Y_j = A + B_j \log W_j - \int_1^j \{(dB_J/dJ) \log W_J\} dJ \\ + (1-B_j) \log R_j - \int_1^j \{d(1-B_J)/dJ\} \log R_J dJ$$

$$(2)' \quad \log Y_j = A + B_j \log W_j + (1-B_j) \log R_j$$

$$- \int_1^j (dB_J/dJ) \log (W_J/R_J) dJ, \quad A: \text{積分定数}$$

となる。

(2)' が (2) に近似するには、 $\int_1^j (dB_J/dJ) \log (W_J/R_J) dJ$ の値が相対的に小さいこと（無視できること）が必要である。この条件を考えると、①労働分配率の変化 (dB_J/dJ) の近似である差分 $(B_{J+1}-B_J)$ が（絶対値として）小さいこと、②データ J は任意に並べられたものであることから $\sum_1^j (B_{J+1}-B_J)$ は相殺現象をとめない、 $\int_1^j (dB_J/dJ) \log (W_J/R_J) dJ$ の値は相対的に小さくなると期待されること、③労働分配率が 0.5 に近いほど $\log (W_J/R_J)$ はゼロに近似すること、以上の条件を満たす「条件の数」と

「その程度」に応じて（事実上、計量分析データでは満たしていると考えられる）、 $\int_1^i (dB_j/dJ) \log(W_j/R_j) dJ$ 項は無視できる値になる。

<Proposition 1>上の①から③の条件を満たすならば、(2) $Y_j = W_j + R_j$ は

$$\log Y_j = A + B_j \log W_j + (1 - B_j) \log R_j$$
で近似できる。

2. 「分配率一定のデータ・セット」と Cobb-Douglas 型関数

さて、Cobb-Douglas 型生産関数の議論において理論・計量の両面から重要なケースは、分配率を同じくするデータ・セットが描がく生産関数の形である。今、産出額 $Y (\equiv P_Q Q)$ 、労働所得 $W (\equiv \omega L)$ 、資本所得 $R (\equiv rK)$ とし、 $z (\equiv W/R)$ が $z_j = 1.5$ となるデータ・セット $N_j(Y_{ji}, W_{ji}, R_{ji})$ 、

$$N_j; N_{j1}(10, 6, 4), N_{j2}(20, 12, 8),$$

$$N_{j3}(30, 18, 12), N_{j4}(40, 24, 16), \dots$$

を作る。このとき所得の恒等式 $Y = W + R$ より、

$$\text{労働分配率 } W/Y = z_j / (1 + z_j),$$

$$\text{資本分配率 } R/Y = 1 / (1 + z_j)$$

が成立している。この「分配率一定のデータ・セット」では、 $B + C = 1$ を前提としない3次元平面式

$$(3) \quad \log Y = \log A + B \log W + C \log R \quad A, B, C: \text{コンスタント}$$

において、当該係数は $B + C = 1$ となる。なぜなら、(3)式は

$$\log Y = \log A + B \log W + C \log R + \log R - \log R + B \log R - B \log R$$

$$\log(Y/R) = \log A + B \log(W/R) + (C - 1 + B) \log R$$

$$\log(1 + z_j) = \log A + B \log z_j + (C - 1 + B) \log R$$

となり、この R が様々の R_{ji} を満たすためには、(他の項はコンスタントになるので) $\log R$ の係数 $(C - 1 + B)$ はゼロ、即ち $B + C = 1$ となる。換言すると、ほぼ z_j を満たすデータ・セットでの計量分析では $B + C$ は1からほとんど乖離できない。このとき(3)式は

$$(4) \quad \log Y_{ji} = \log A + B \log W_{ji} + (1-B) \log R_{ji}$$

となる。これは〈Proposition 1〉からも理解できる。

ここで、不変の相対価格 $(\omega/P_Q, \gamma/P_Q)$ が仮定されると(4)式は

$$(4)' \quad \log Q_{ji} = \{\log A + B \log (\omega/P_Q) + (1-B) \log (\gamma/P_Q)\} \\ + B \log L_{ji} + (1-B) \log K_{ji},$$

と { } 内は定数となり、(4)' 式は $B+C=1$ を満たす Cobb-Douglas 型生産関数になる⁷⁾。

計量分析では、完全に比例したデータ・セットは、ひとつのデータとしてしか認識しないが、 $\dot{\omega} \dot{\gamma}$ 「一本の直線」にすぎないものを Cobb-Douglas 型関数「平面」と誤解してしまうことは容易におこりうる。それゆえ、推定の際には、単に説明変数間の相関係数値、係数の t 値だけで判断するのではなく、必ず分布図を描く必要がある。

〈Proposition 2〉 同じ(労働)分配率をもつデータ・セットは、Cobb-Douglas 型所得関数「平面」上に「一本の直線」を描く。また、不変の相対価格 $(\omega/P_Q, \gamma/P_Q)$ が仮定されると Cobb-Douglas 型所得関数は、Cobb-Douglas 型生産関数に相互変換できる。

3. 平面関数が Cobb-Douglas 型生産(所得)関数になる理由

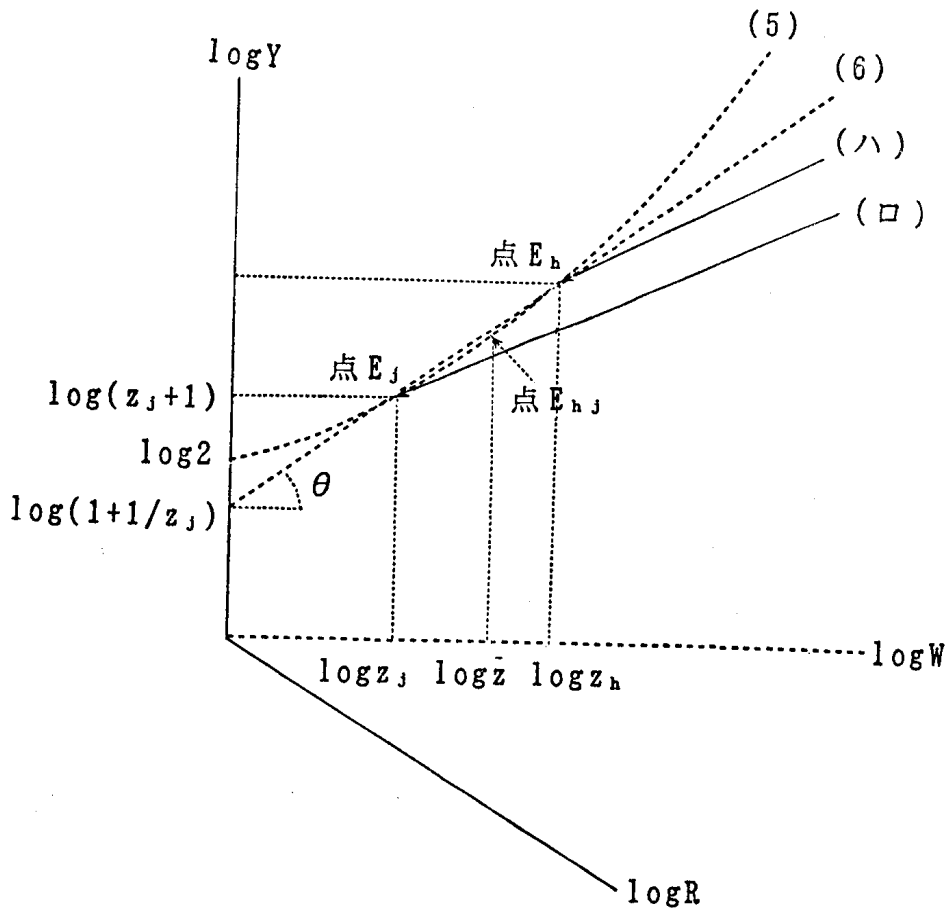
不変の相対価格 $(\omega/P_Q, \gamma/P_Q)$ に対しては常に所得関数から生産関数へ転換可能なので、(4)' 式のような (Q, L, K) 型ではなく、(4)式の (Y, W, R) 型で導かれた「一本の直線の像」について考察していこう。所得恒等式の定義と特定の $z=z_j$ より

$$(4-1) \quad \log W_{ji} = \log z_j + \log R_{ji} \quad \longleftrightarrow W_{ji}/R_{ji} = z_j$$

$$(4-2) \quad \log Y_{ji} = \log(z_i + 1) + \log R_{ji} \quad \longleftrightarrow R_{ji}/Y_{ji} = 1/(1+z_j)$$

7) $\log Y = \log Q + \log P$ という一次変換の関係にあるとき、 $\log Y$ と $\log Q$ の分散は等しい。この関係は W と R でも同様である。また、共分散も変化しない。以上は計量面からの説明である。

第3図



$$(4-3) \quad \log Y_{ji} = \log(1+1/z_j) + \log W_{ji} \longleftrightarrow W_{ji}/Y_{ji} = z_j/(1+z_j)$$

が成立している。これらを第3図に描くと、それぞれは2軸を含む各平面(各軸平面)上において勾配45度をもつ直線として描かれる。この投影写像をもつ直線は、どの軸平面に対しても約35度—— $\tan^{-1}(1/\sqrt{2}) \doteq 35.2644$ ——の角度をもつ(図中に矢印で示した)矢印直線(ロ)となる(第3図では、イメージの混乱を避けるため「正」象限に限定して描写している)。

さて、(4)式での係数 B は、Cobb-Douglas型所得関数「平面」が $Y-W$ 軸平面を切断する直線の勾配を表わしている。この勾配が、なぜデータ・セットの「労働分配率」を示すかを考えてみよう。第3図において、Cobb-Douglas型所得関数「平面」を特定するには、「一本の直線」と他の一点——我々のケースでは矢印直線は平行になるので他の「一本の直線」でもよい——が必要である。任意の分配率 z_j が描く直線は、 $Y-W$ 軸平面において

座標 $(\log z_j, \log(z_j+1))$ をもつ。そこで矢先点 E_j の $Y-W$ 軸平面の点 $(\log z_j, \log(z_j+1))$ の軌跡をもとめると、

$$(5) \quad y_j = \log(e^{x_j} + 1) \quad \text{ただし, } x_j \equiv \log z_j, \quad y_j \equiv \log(z_j + 1)$$

$$(5-1) \quad dy_j/dx_j = e^{x_j}/(e^{x_j} + 1) = z_j/(z_j + 1)$$

となる。矢先点 E_j での(5)式の勾配は、(5-1)より当該データ・セットの労働分配率に等しくなる。また、 z_j が増加すると矢印直線の先矢点 E は、 $Y-W$ 軸平面の曲線上を右上がりに移動する(逡増関数)。

<Proposition 3> 同じ分配率をもつデータ・セットは一本の直線を描く。この直線が $Y-W$ 軸平面を通過する座標は $(\log z_j, \log(z_j+1))$ である。異なる分配率データ群からえられる通過座標軌跡は逡増曲線(5)となる。各データ・セットの労働分配率は、当該通過座標点での曲線(5)の接線勾配である。

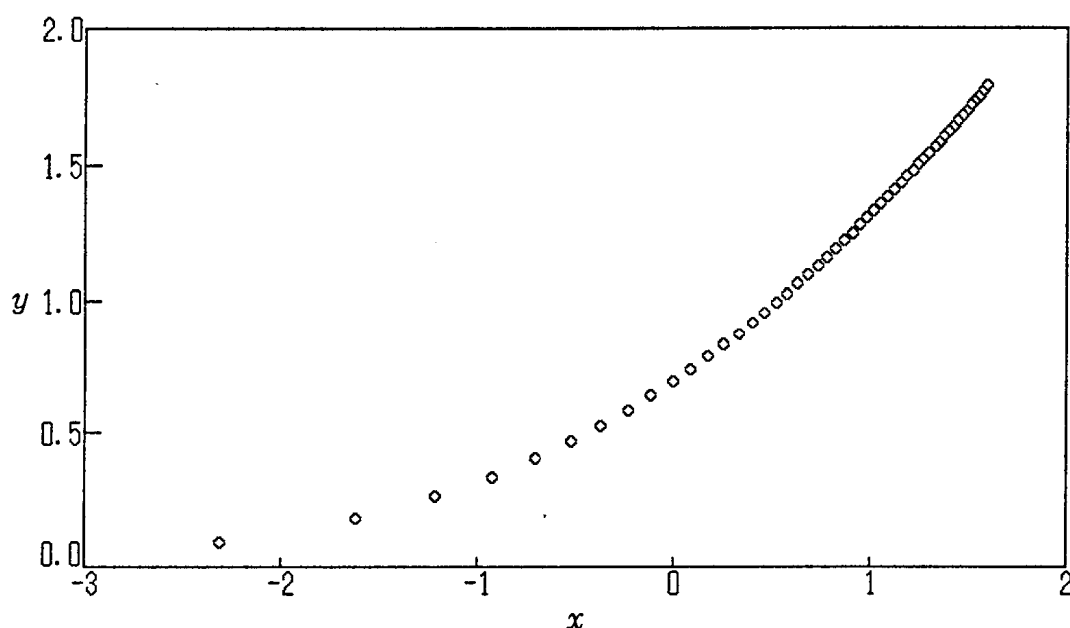
第3図で描かれているように、分配率 z_j と分配率 z_h をもつデータ群——2本の矢先直線、あるいは、2つのデータ・セット(複数のデータ・セットをデータ群とよぶ)——から形成される(完全に fit した)3次元平面が $Y-W$ 軸平面を切断する切断直線の勾配は、曲線(5)上の2点 E_j と E_h を結んだ直線の勾配 θ ——第3図の直線(6)の勾配 θ ——に等しい。それゆえ次の問題は、この勾配 θ が、なぜデータ群の労働分配率に近似するかである。勾配

θ は、Taylor 近似すると(ただし、 $z \equiv (z_h + z_j)/2$)、

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\log(z_h + 1) - \log(z_j + 1)}{\log z_h - \log z_j} = \frac{\log(\bar{z} + 1 + (z_h - \bar{z})) - \log(\bar{z} + 1 + (z_j - \bar{z}))}{\log(\bar{z} + (z_h - \bar{z})) - \log(\bar{z} + (z_j - \bar{z}))} \\ &= \frac{\{1/(\bar{z} + 1)\} \{(z_h + 1) - (z_j + 1)\}}{(1/\bar{z})(z_h - z_j)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z} + 1} \end{aligned}$$

となる。すなわち、勾配 θ は、2データ群の(賃金所得/資本所得)比率である z_h と z_j の平均(賃金所得/資本所得)比率 \bar{z} から導かれる労働分配率 $\bar{z}/(\bar{z} + 1)$ に近似する。また、後者は、曲線(5)式の点 $E_{h,j}$ での接線勾配でもある。そこで近似条件を考えると、第4図より、①矢先点 E の軌跡(5)

第4図



が、ほぼ直線に近いという事実⁸⁾、②実績値での労働分配率のとり範囲が狭いほど近似は良くなる。

<Proposition 4> 2本の平行直線から形成される平面式(4)の係数 B は、当該平面が $Y-W$ 軸平面を切断する切断直線の勾配である。切断直線の勾配は2データ群の「平均」労働分配率に近似する。そして、データ群の分配率の差異が小さいほど、その近似は良い。

ここで、上の議論を逆に辿ってみよう。諸企業・産業について多数のデータがある。このデータは、(賃金所得/資本所得)比率 z_j 別にいくつかのグループに分けられる。このとき z_j は平均値 \bar{z} をもった散らばりを示すであろう。各グループ内のデータ・セットは、一本の矢印直線上に位置する。かくして、数本の矢印直線が第3図に描かれることになる。これらの矢先点 E_j に当てはまりのよい直線式

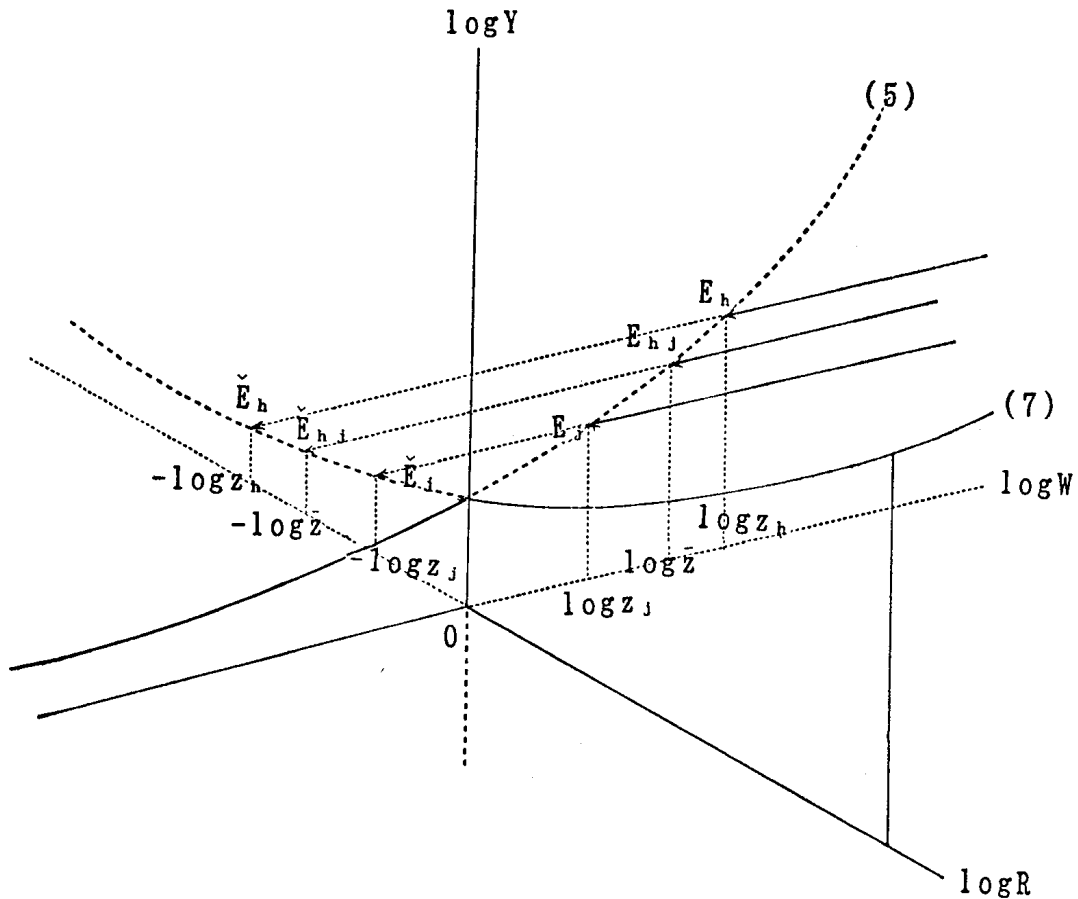
8) (5)式は逓増関数であるが、第4図に描いた現実的な労働分配率40%から90%において、ほぼ直線的な形状を示す。 x は対数であるので注意が必要である。対応する(x 値, 労働分配率値)は、(-1, 0.28)(-0.5, 0.38)(0, 0.5)(0.5, 0.62)(1, 0.73)(1.5, 0.82)である。

$$(6) \log(z_j+1) = A + \theta \log z_j$$

による推定勾配値 $\hat{\theta}$ が、最小 2 乗推定による係数值 B となり、労働分配率を表わすことになる。

それでは「なぜ」3次元平面式(4)の係数 $B+C$ は1に近似する——Cobb-Douglas 型生産関数になる——のだろうか。第5図において、曲線(5)は(データ群による)「 $Y-W$ 軸平面」上に描かれた矢先軌跡であり、曲線(7)は(当該データ群による)「 $Y-R$ 軸平面」上に描かれた矢先軌跡である。曲線(5)と曲線(7)は、描かれる軸平面が異なるだけで、形状は全く同じである。したがって、点 E_h と点 E_j を通る直線 $G1$ ——第3図での(6)直線——の勾配が \bar{z} から導かれる労働分配率 θ を近似したように、点 \check{E}_h と点 \check{E}_j を通る直線 $G2$ の勾配が(同じ) \bar{z} から導かれる資本分配率 $(1-\theta)$ を近似する⁸⁾。この結果として、3次元平面式(4)の係数 $B+C$ は1に近似す

第5図



る。すなわち、 $\log Y$ 軸上で交差するこの近似直線 $G1$ と $G2$ から作られる平面が Cobb-Douglas 型所得（生産）関数として現れるのである¹⁰⁾。

<Proposition 5> $Y-W$ 軸平面上の軌跡曲線(5)の（データ群からの）近似直線 $G1$ と $Y-R$ 軸平面上の軌跡曲線(7)の（データ群からの）近似直線 $G2$ が作る平面が、Cobb-Douglas 型所得（生産）関数である。近似直線 $G1$ の勾配はデータの平均労働分配率を示し、近似直線 $G2$ の勾配はデータの平均資本分配率を示し、近似直線 $G1$ と $G2$ は $\log Y$ 軸上で交差する。

4. Cobb-Douglas 型所得関数と Cobb-Douglas 型生産関数の関係と賃金率変化

これまで、Cobb-Douglas 型所得関数と Cobb-Douglas 型生産関数を峻別する必要がなかったのは、「不変相対価格」が前提されていたからである（(4)式と(4)'式を参照）。この前提がないとき、即ち、以下では、価格 (P_Q, ω, r) のうち、 P_Q と r は固定し、名目賃金率 ω だけが異なる場合に両関数の関係はどうなるかを検討しよう。

今、データ・セット N_j — $z_j=3$, 労働分配率 0.75—, $N_j; N_{j1}(Y_{j1}, 60, 20)$, $N_{j2}(Y_{j2}, 120, 40)$, $N_{j3}(Y_{j3}, 180, 60)$, $N_{j4}(Y_{j4}, 240, 80)$, を作る。 N_{j1} という小規模企業から N_{j4} の大規模企業という想定である。さらに、当該各規模において多数（20個）の企業が存在すると想定しよう。 N_{j1} を例にとると、 $N_{j1}(Y_{j1}, 60, 20)$ をデータ作成の「種」として、賃金所得（支払） W_{j1v} が、正規分布（平均60, 標準偏差12—変動係数 0.2）から得られる20

9) $Y-R$ 軸平面上に描かれた矢先点は $(\log(1/z_j), \log(\{z_j+1\}/z_j))$ となる。今、 $\zeta_j \equiv 1/z_j$, $\bar{\zeta} \equiv (\zeta_i + \zeta_n)/2$ とおくと、矢先点は $(\log(\zeta_j), \log(1+\zeta_j))$ となり、(5)式に一致する。点 \bar{E}_h と点 \bar{E}_j を通る直線 $G2$ の勾配 $\theta = \bar{\zeta}/(\bar{\zeta}+1) = 1/(1+\bar{z})$ は、 \bar{z} から導かれる資本分配率となり、同じ \bar{z} から導かれる労働分配率 $\bar{z}/(1+\bar{z})$ との合計は 1 となる。

10) 点 $\bar{E}_{hj}(\log \bar{z}, \log(\bar{z}+1))$ での接線は、勾配 θ で Y 軸切片値 $\{\log(\bar{z}+1) - \theta \log \bar{z}\}$ である。他方、点 $\bar{E}_{hj}(-\log \bar{z}, \log(\{z+1\}/z))$ での接線は、勾配 $(1-\theta)$ で Y 軸切片値 $\{\log(\{\bar{z}+1\}/\bar{z}) + (1-\theta) \log \bar{z}\}$ である。切片値を引き算するとゼロとなる。

個の賃金所得データ W_{j1v} —— $v=1\sim 20$ ——を作る。同様に、資本所得についても正規分布（平均 20，標準偏差 4 ——変動係数 0.2）から得られる 20 個の資本所得データ R_{j1v} をつくる。 Y_{j1v} は、 $W_{j1v} + R_{j1v}$ となる。同じように、 N_{j2} 、 N_{j3} 、 N_{j4} についてもそれぞれに対し 20 個ずつ作り、データ総数は 80 個となる。このデータでの矢先軌跡(6)式での最小 2 乗推定量は

$$\log(1+z) = 0.55 + 0.767 \log(z) \quad (t=93) \quad (154) \quad R^2 = 0.997, (DW=1.99)$$

となり、実績値労働分配率 0.754 に近似した 0.767 を示す。なお、データの労働分配率は最小値 0.58，最大値 0.89，平均値は 0.754 である。

次に、(4)式での最小 2 乗推定量は

$$\log Y = 0.57 + 0.765 \log W + 0.232 \log R \quad (39) \quad (140) \quad (46) \quad R^2 = 0.999, (DW=2.00)$$

となり、近似した 0.765 という労働分配率を示す。また、名目賃金率 ω を固定すると、(4)と(4)'式で示したように全く同じ好結果を得る。

さて、名目賃金率 ω を（平均 1，標準偏差 0.1）から得られる 80 個の賃金率データ ω_m ($m=1\sim 80$) をつくる。80 個の ω_m を用いて、先の 80 個の賃金所得から 80 個の労働量 L ($L_j \equiv W_j/\omega_m$) データを作る。このデータを用いた最小 2 乗推定量は、

$$(8) \quad \log Y = 0.70 + 0.689 \log L + 0.295 \log R \quad (9) \quad (26) \quad (12) \quad R^2 = 0.983, (DW=2.36)$$

となる。労働分配率になることが期待される $\log L$ の推定値 \hat{B} は、データの実績値 0.754 より小さくなるが、Cobb-Douglas 型生産関数であるために必要な $B+C$ 値は 0.984 となり 1 に近い。同様にして、賃金率 ω の標準偏差を大きくしてゆき（平均 1，標準偏差を 0.2，0.3，0.4），賃金所得から労働量への変換に一層の散らばりをもたせてゆくと、第 1 表となる。この表において、 γ が不変のとき一般性を失うことなく資本所得 R は資本ストック K の指標とすることができるので¹¹⁾、 R/L は K/L （資本ストック/労働量）比

11) 以下では、一般性を失うことなく $\gamma=1$ ， $P_Q=1$ とする。

率の指標であり、第1表の K/L の範囲欄は ω の標準偏差の違いからもたらされたデータの実績値 K/L の最小値と最大値を示す。ここで銘記されるべきことは、どの場合も実績値 K/L の平均値は 0.33 ということ、また、労働分配率についてのデータの実績値は、どのケースでも最小値 0.58 と最大値 0.89、平均値は 0.754 を示すことである。

第1表

	B	$B+C$	平均 K/L	K/L の範囲	データ平均 労働分配率
① ω の標準偏差 0	0.765	0.997	0.33	0.12-0.74	0.754
② ω の横準偏差 0.1	0.689	0.984	0.33	0.13-0.74	0.754
③ ω の横準偏差 0.2	0.517	0.945	0.33	0.12-0.75	0.754
④ ω の横準偏差 0.3	0.336	0.902	0.33	0.08-0.84	0.754
⑤ ω の横準偏差 0.4	0.069	0.836	0.33	0.00-0.92	0.754

「生産関数」は、生産要素投入量（フロー指標）と産出量の関係である。賃金所得 W を労働投入指標 L とし、資本所得 R を資本投入指標 K とみなすことはひとつの有力な方法である。第1表のデータ・セットは、どのデータ規模 N_{jt} においても期待値 $z(\equiv W/R=L/K)=z_j=3$ をもつので、「限界生産力仮説」が成立しているならば、Cobb-Douglas 型生産関数を得られるはずである。または、Cobb-Douglas 型「所得」関数が成り立っているならば、これはひとつの Cobb-Douglas 型生産関数であり、当該労働分配率はこの Cobb-Douglas 型生産関数の z_j ——平均値 $z_j(\equiv W/R=L/K)=3$ ——での限界生産力から得られていると考えられる。この意味で第1表の①では当該 Cobb-Douglas 型生産関数が成立している。すなわち「限界生産力仮説」とは矛盾しない。ところが、第1表より、単位労働当たり賃金率 ω_m が、期待値は不変だが散らばるほど（実際のデータはこのような散らばりを示すと予想される）、Cobb-Douglas 型生産関数として期待されている結果を示さない¹²⁾。また、規模が大きくなるほど ω_m を高くするというような関係を導入しても Cobb-Douglas 型生産関数として期待される結果を示さない。換言すると、(8)式「型」での第1表の推定結果である②から⑤において、

ここで定義した Cobb-Douglas 型生産関数にならないことは、「限界生産力仮説」が全く信頼できないものであることを意味している。だが、それにもかかわらず、Cobb-Douglas 型生産関数の fit が良いというのであれば、それは「 ω_m の散らばりが小さいこと」、すなわち、各企業データの賃金支払額から「ほぼ共通の賃金率」をもちいて労働投入量（時間）「データ自体」が逆算されているか、そしてまた、企業間の賃金率セット (bundle) がほぼ似通っていること、に起因していると推測される。

<Proposition 6> あるひとつの分配率の回りに散らばりをもつデータ・セット——変動係数 0.2 をもつ正規分布からえられた賃金所得と資本所得データ・セット——での Cobb-Douglas 型所得関数の fit は良い。生産物価格 p_0 と資本価格 r を共通（不変）としたとき、Cobb-Douglas 型生産関数がえられるためには、各企業・産業の賃金所得を労働量に変換する際の名目賃金率は似通っていなければならない。

5. データ群の平均分配率と加重平均分配率

労働分配率 0.75 のデータ ($Y=80, W=60, R=20$) と労働分配率 0.65 のデータ (1850, 1200, 650) の単純平均労働分配率とは、 $(0.75 + 0.65)/2 = 0.7$ である。加重平均とは、各労働分配率を当該所得で加重したもの

$$\frac{60}{(80+1850)} \times 0.75 + \frac{1850}{(80+1850)} \times 0.65 = 0.656$$

であり、これは総賃金所得/総所得 = $1260/1930 = 0.653$ と近似する。全経済の分配率実態を把握するには、加重平均が採用されるべきである。

ここから生じるもうひとつの問題点は、以上ではデータの分配率をほぼ正

↖12) 共変動 S , 相関係数 r とすると、推定値は $\hat{B} = (S_{RR}S_{LY} - S_{LR}S_{RY}) / (S_{LL}S_{RR} - S_{LR}^2) = \{S_{LY} - r_{LR}\sqrt{(S_{LL}/S_{RR}) \cdot S_{RY}}\} / (1 - r_{LR}^2)S_{LL}$, $\hat{C} = (S_{LL}S_{RY} - S_{LR}S_{LY}) / (S_{LL}S_{RR} - S_{LR}^2) = \{S_{RY} - r_{LR}\sqrt{(S_{RR}/S_{LL}) \cdot S_{LY}}\} / (1 - r_{LR}^2)S_{RR}$ で表わされるが、 S_{LL} 以外はあまり変化しない。これより、主に $\log L$ の分散が大きくなることが \hat{B} を減らし、 L と R の相関係数 r_{LR} の減少が \hat{C} を増やす方向に作用している。

確に推定するように思われた Cobb-Douglas 型「所得」関数でさえ、その当該推定値は単純平均分配率であり、現実を反映した（集計値としての）加重平均分配率ではない。この乖離現象は、理論的には推定分配率が第3図の「矢先」軌跡の勾配として計算されることから理解できる。例えば、 \dot{Y} 矢先直線上では、矢先から右上方にあるデータほど規模（賃金所得や産出額）が大きい。ただし、1本の直線上のデータでは同じ分配率をもつので、分配率に関する規模問題は生じない。しかし、2本の矢先直線から推定される分配率には、この乖離問題が発生する。というのは、分配率が異なる（第3図の）矢先直線（ハ）と（ロ）上にデータがどのように位置していても Cobb-Douglas 型所得関数で推定される分配率は同じ値——各データの単純平均分配率——を示すからである。このことを例示するために、今、先の労働分配率 0.75 をもつデータ・セット $N_j(Y_{ji}, W_{ji}, R_{ji})$ から作られた80個と、新たに労働分配率 0.65 をもつデータ・セット $N_h(Y_{hi}, W_{hi}, R_{hi})$

$$N_h; N_{h1}(Y_{h1}, 120, 65), N_{h2}(Y_{h2}, 240, 130), \\ N_{h3}(Y_{h3}, 360, 195), N_{h4}(Y_{h4}, 480, 260)$$

をもとにして、先ほどと同様に80個のデータを作り、 N_j と N_h の計160個のデータをえる。この180個のデータ群を用いて第1表と同じ作業をした結果が第2表の B_{jh} 列と $B_{jh} + C_{jh}$ 列である。このデータ群の単純平均労働分配率は 0.701 であり加重平均労働分配率は 0.680 である。第3図の直線(6)式及び第2表①での推定値はそれぞれ 0.701 と 0.693 となり近似は良い。

次に、先の新データ・セット $N_h(Y_{hi}, W_{hi}, R_{hi})$ を単純に10倍した新新データ・セット $N_k(Y_{ki}, W_{ki}, R_{ki})$ —— $z_k=1.85$, 労働分配率 0.65——,

$$N_k; N_{k1}(Y_{k1}, 1200, 650), N_{k2}(Y_{k2}, 2400, 1300), \\ N_{k3}(Y_{k3}, 3600, 1950), N_{k4}(Y_{k4}, 4800, 2600)$$

から同じように80個のデータを作る。このデータ・セットと労働分配率 0.75 をもった旧データ・セット $N_j(Y_{ji}, W_{ji}, R_{ji})$ の80個からの計160個のデータを用いて¹³⁾、同じ作業をした結果が第2表の B_{jk} 列である。ここでは、労働分配率の低いデータ・セットの規模をさらに10倍したことから、「実際の

労働分配率」は低い労働分配率 0.65 へ相当引き寄せられるはずである¹⁴⁾。
このデータ群の加重労働分配率は 0.652 である。しかし、推定値 B_{jh} と B_{jk}
には、ほとんど違いがでない。

第2表

	B_{jh}	$B_{jh}+C_{jh}$	B_{jk}
① ω の横準偏差 0	0.693	0.994	0.697
② ω の横準偏差 0.6	0.632	0.979	0.623
③ ω の横準偏差 1.2	0.495	0.938	0.474
④ ω の横準偏差 1.8	0.339	0.889	0.317
⑤ ω の横準偏差 2.4	0.106	0.812	0.093

<Proposition 7> 集計労働分配率は加重平均労働分配率である。加重を考慮しない回帰推定量から、たとえ良好な Cobb-Douglas 型所得関数あるいは Cobb-Douglas 型生産関数がえられたとしても、それは偶然の産物である。

6. クロス・セクション・データでの結論

マクロ集計値として現実を反映した労働分配率は、総賃金所得を総所得で割ったもの、すなわち加重平均労働分配率である。実際、国民所得勘定はそのように計測されている。それにもかかわらず、クロス・セクション・データをもちいて加重平均を考慮しない、次の両式

$$(9) \quad \log Q = \log A + B \log L + C \log K$$

$$(10) \quad \log Y = \log A + B \log W + C \log R$$

での最小2乗推定量において、推定値 \hat{B} が現実の「集計」労働分配率に、推定値 \hat{C} が「集計」資本分配率に近似するならば、それは一体何を意味しているのだろうか。

13) データ群の平均労働分配率は 0.700 であり、直線(6)式での推定値は 0.701 である。

14) N_j と N_h の間にはほぼ2倍の規模の違いがあるので、 N_j と N_k の間にはほぼ20倍の規模格差がある。

第1点として、加重平均を組込んでいない推定量（方法）であるにもかかわらず fit が良いということは、現実のデータが「ほぼ一本の矢先直線」を中心に散らばっていること、換言すると、ひとつの分配率の回りにデータが散らばっていることを意味する。これは、データ・セット $N_j(Y_{ji}, W_{ji}, R_{ji})$ で例示されたように、労働分配率の実績値が最小値 0.58 と最大値 0.89、平均値は 0.754 というように幅広く分布しても、それなりの fit がえられる。

第2点として、(9)と(10)式が共に近似した当該推定値を示すということは、前節で分析したように、ほぼ共通の要素価格が適用されて、「数量」自体がデータ化されていると考えられる。すなわち、Cobb-Douglas 型生産関数の fit の良さは、ほぼ共通の要素価格をもつデータに起因するものである。

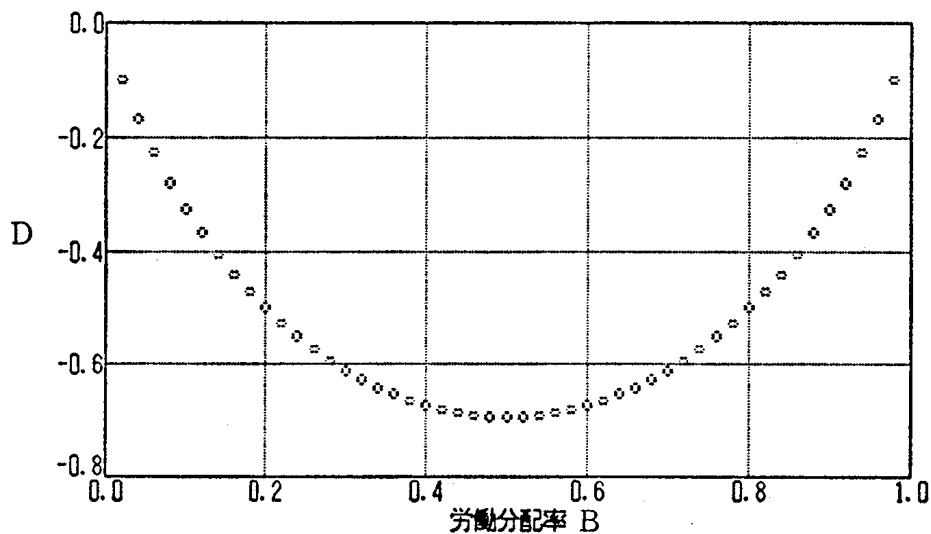
Ⅳ Cobb-Douglas 型生産関数とタイム・シリーズ・データ分析

国民所得統計で見られるように、総所得 Y は総賃金所得 W と総資本所得 R からなる。そこで $Y_T = W_T + R_T$ を時間 T で微分すると

$$dY_T/Y_T = (W_T/Y_T)(dW_T/W_T) + (R_T/Y_T)(dR_T/R_T), \quad (T=1 \dots t \dots)$$

より、労働分配率 $B_T \equiv (W_T/Y_T)$ として、連続近似すると、

第6図



$$(11) \quad \log Y_t = H_0 + B_t \log W_t + (1 - B_t) \log R_t$$

$$- \int_0^t (dB_T/dT) \log (W_T/R_T) dT$$

$$= H_0 + B_t \log W_t + (1 - B_t) \log R_t - (D_t - D_0)$$

$$D_t \equiv B_t \log B_t + (1 - B_t) \log (1 - B_t), \quad H_0 : \text{積分定数}$$

をうる¹⁵⁾。ここで(11)式において、 $(D_t - D_0)$ 値の大きさが相対的に無視できる場合を考えてみよう。第6図より、①現実の労働分配率 B は限られた実績値範囲をもつので、 $(D_t - D_0)$ 値は比較的小さい上限値をもつ。②(簡単化のため、労働分配率が0.5以上とすると)初期労働分配率 B_0 と t 期の労働分配率 B_t が近いほど、 $|D_t - D_0|$ は小さくなる。③乖離幅 $|B_t - B_0|$ が同じなら、線分 $B_t B_0$ の位置が第6図横軸上の労働分配率0.5に近いほど $|D_t - D_0|$ 値は小さくなる。このようなとき $(D_t - D_0)$ 項は相対的に無視で

$$15) \quad dY_T/Y_T = B_T(dW_T/W_T) + (1 - B_T)(dR_T/R_T)$$

$$\left[\log Y_T \right]_0^t = \int_0^t B_T \{ (dW_T/T_T) / W_T \} dT + \int_0^t (1 - B_T) \{ (dR_T/dT) / R_T \} dT$$

となる。さらに、部分積分すると、

$$\left[\log Y_T \right]_0^t = \left[B_T \log W_T \right]_0^t - \int_0^t (dB_T/dT) \log W_T dT$$

$$+ \left[(1 - B_T) \log R_T \right]_0^t - \int_0^t \{ d(1 - B_T) / dT \} \log R_T dT$$

$$\log Y_t = H_0 + B_t \log W_t - \int_0^t (dB_T/T_T) \log W_T dT$$

$$+ (1 - B_t) \log R_t - \int_0^t \{ d(1 - B_T) / dT \} \log R_T dT$$

$$\log Y_t = H_0 + B_t \log W_t + (1 - B_t) \log R_t - \int_0^t (dB_T/T) \log (W_T/R_T) dT$$

$$DD \equiv \int_0^t (dB_T/dT) \log (W_T/R_T) dT = \left[B_T \log z_T \right]_0^t - \int_0^t B_T (dz/dT) / z dT$$

$$= \left[B \log z \right]_0^t - \int_0^t \dot{B} / (1 - B) dT = \left[B \log z \right]_0^t - \left[-\log (1 - B) \right]_0^t$$

$$= \left[B \log z \right]_0^t + \left[\log (1 - B) \right]_0^t = \left[B \log B / (1 - B) \right]_0^t + \left[\log (1 - B) \right]_0^t$$

$$= \left[B \log B - B \log (1 - B) \right]_0^t + \left[\log (1 - B) \right]_0^t$$

$$= B_t \log B_t - B_t \log (1 - B_t) + \log (1 - B_t)$$

$$- \{ B_0 \log B_0 - B_0 \log (1 - B_0) + \log (1 - B_0) \}$$

なお、 $z = B / (1 - B)$, $dz/dT = \{ (\dot{B}(1 - B) - B(-\dot{B})) / (1 - B)^2 = \dot{B} / (1 - B)^2$,

$$(dz/dT) / z = \dot{B} / B(1 - B)$$

きる。

このとき、 $Y_t = W_t + R_t$ は

$$(12) \quad \log Y_t = H_0 + B_t \log W_t + (1 - B_t) \log R_t$$

で近似できる。すなわち、時系列における Cobb-Douglas 型「所得」関数が成り立つ。

ここで、総所得 Y_t が g_Y で増加し、総賃金所得 W_t が g_W で増加し、総資本所得 R_t が g_R で増加し、労働分配率が $B_t = B_1$ ——回帰係数として固定された平均労働分配率——のケースを想定しよう。

このとき、

$$(12)' \quad \log Y_t = H_0 + B_1 \log W_t + (1 - B_1) \log R_t \quad B_1 : \text{コンスタント}$$

$$(13) \quad g_Y = B_1 g_W + (1 - B_1) g_R$$

$$(13)' \quad B_1 = (g_Y - g_R) / (g_W - g_R), \quad g_X \equiv \frac{\dot{X}}{X} \quad (X = Y, W, R)$$

が成立する。

他方、(1)式では定数項 $\log A$ であったが、技術進歩変数の代理変数として $\log A_t$ とした「技術進歩」Cobb-Douglas 型関数式を

$$(14) \quad \log Q_t = \log A_t + B_2 \log L_t + (1 - B_2) \log K_t$$

で表わす。これを微分して整理すると、

$$(15) \quad B_2 = (g_Q - g_K - g_A) / (g_L - g_K), \quad g_X \equiv \frac{\dot{X}}{X} \quad (X = A, Q, L, K)$$

をうる。

ここで、(13)' と(15)式から、 $B_1 = B_2$ となる条件をもとめると

$$(16) \quad g_A = g_Q - B_1 g_L - (1 - B_1) g_K$$

を得る。

ところで、生産関数の型を具体的に特定することなく、Hicks 中立技術進歩と一次同次の生産関数 $Q_t = A_t F(L_t, K_t)$ を仮定すると、

$$(17) \quad \dot{Q}/Q = \dot{A}/A + A(\partial F/\partial L)(L/Y)(\dot{L}/L) + A(\partial F/\partial K)(K/Y)(\dot{K}/K)$$

となる。ここで Solow (1957) は「完全競争仮定と限界生産力仮説より、 $A(\partial F/\partial L)(L/Y)$ は労働分配率 B_s となり、 $A(\partial F/\partial K)(K/Y)$ は資本分配率 $1 - B_s$ 」になるとして、

$$(18) \quad (\dot{A}/A)_s = g_Q - B_s g_L - (1 - B_s) g_K$$

を導いた。ここで注意したいのは、 B_s が労働分配率に近似することを、(18)式から直接検証できれば、「限界生産力仮説」は否定されない。しかし、この作業はなされないで、 $(\dot{A}/A)_s$ が「不明の B_s 」の代わりにほぼ不変の実績値労働分配率 B_t を用いてデータから逆算されたのである。すなわち、Solow は技術進歩率 $(\dot{A}/A)_s$ を

$$(19) \quad (\dot{A}/A)_s \equiv g_Q - B_t g_L - (1 - B_t) g_K \quad g_{AS} \equiv (\dot{A}/A)_s$$

で定義したのである。これが、(14)式の「技術進歩」Cobb-Douglas 型関数を「技術進歩」Cobb-Douglas 型生産関数に変身させるのである。なぜなら、回帰係数 \hat{B}_1 は真のパラメータ B_1 と（ウェイトされた）確率的誤差項からなる確率変数である。このことから、実績値 B_t の分散が十分小さいとき、回帰においては(19)式の B_t を B_1 で近似した

$$g_{AS} \doteq g_Q - B_1 g_L - (1 - B_1) g_L$$

をうる。これは(16)式が成立することを意味し、したがって(14)式の B_2 は必然的に(12)'式の B_1 すなわち労働分配率になるのである。「限界生産力仮説」が仮説として意味をもつのは、限界生産力が価格や分配率を説明できるという因果関係がそこにあるからである。ところが、 B_2 が実績値労働分配率 B_1 と一致したのは、逆算された「技術進歩率の定義 g_{AS} 」（換言すると、恒等式）によるものであり、「限界生産力説」とは無関係である。

<Proposition 7> タイム・シリーズ・データ分析での「技術進歩」Cobb-Douglas 型生産関数の fit の良さは、「限界生産力仮説」とは無関係に、「技術進歩率の定義 g_{AS} 」「分配率の安定性」から得られたものである。

V 結 論

Solow が F. M. Fisher に語った経済現象「もし、Cobb-Douglas 型生産関数をもちいた推定で労働分配率が25%、資本分配率が75%という逆の結果をえていたならば、いま我々は集計生産関数というようなものを議論して

いなかっただろう」(F. M. Fisher, 1971) は、単なる偶然の産物ではなく、これを導くメカニズムがクロス・セクションとタイム・シリーズの両分析において、「限界生産力仮説」とは無関係に存在していると思われる。本稿は、この因果のひとつの方向を示すものであると考える。

参 考 文 献

- 佐藤和夫『生産関数の理論』創文社, 1975.
佐藤隆三『経済成長の理論』勁草書房, 1986.
Fisher, F. M., "Aggregate production function and the explanation of wage :A simulation experiment", *R. E. Statistics*, 1971.
Fisher, F. M., Solow R. M., and J. M. Kearl, "Aggregate production functions :Some CES experiments", *R. E. Studies*, 1977.
Mankiw, N. G., Romer D., and D. N. Weil," A Contribution to empirics of economic growth", *Q. J. E.*, 1992.
Samuelson, P. A., "Paul Douglas's measurement of production function and marginal productivities", *J. P. E.*, 1979.
Solow, R. M., "Technical change and the aggregate production function", *R. E. Statistics*, 1957.

(にしかわ・けんじ／経済学部教授／1995.4.28受理)