＜研究ノート＞

世代重複モデルにおける内生的循環について(２)†

中　村　勝　之

目次

１．はじめに
２．Stone-Geary Preference　（以上前号）
３．Monetary Cycles（以下本号）
　3. 1. モデルの基本設定
　3. 2. 貨幣需要関数の導出
　3. 3. １階差分方程式の性質
　3. 4. 周期的変動の可能性
　3. 5. 若干の考察
　3. 6. 数学注
４．Strategic Complementality（以下次号）
５．Asymmetric Information
６．まとめにかえて
補論．Bifurcation について
参考文献

†　本節の作成段階において三原裕子（大阪市立大学），弘田祐介（大阪市立大学大学院）の各氏から有益なコメントを賜った。記して感謝する。なお本ノートにおけるすべての誤りは筆者の責任に帰するとともに，執筆状況によって今後の本ノートの内容が変更することがあることをご容赦いただきたい。

キーワード：世代重複モデル，相対的危険回避度，貨幣均衡，非貨幣均衡，周期解

３．Monetary Cycles

本節では，貨幣の存在が経済の周期的変動をもたらすことを示したモデルのうち，その先駆的研究である Grandmont〔1985〕[1] について検討する。通常貨幣をモデルに挿入する際，貨幣保有が主体に効用をもたらすモデル（Brock〔1975〕など）や貨幣保有に依存する取引費用関数を考慮したモデル（Romer〔1986〕など），予算制約とは別に財の取引に当たって事前に貨幣を保有しておかなければならない制約（cash-in-advance constraint）を導入したモデル（Stockman〔1981〕など）などがある。ここで検討する Grandmont〔1985〕は想定される関数の修正や追加を必要とせず，しかも貨幣の存在のみで不規則な経済の動きを描き出せているという意味で先駆的である[2]。

しかし Grandmont〔1985〕のモデルは一般的な関数形を用いて分析されているため，そのエッセンスがつかみにくい。そこでここでは，すべての関数を特定したもとで彼のモデルについて検討していくことにする。

3. 1. モデルの基本設定

Grandmont〔1985〕の提示したモデルは次のような基本構造を持っている。

毎期一定数の消費者が生まれ，彼らが２期間のライフサイクルを営む（２世代）の世代重複モデルが前提される[3]。各ライフサイクルにおいて，すべての消費者には $l_i(i=1,2)$ の労働賦存が与えられる[4]。彼らはその中から

1）Grandmont, J.M.〔1985〕, ‘On Endogenous Competitive Business Cycles.’ *Econometrica* 53 pp.995-1045
2）効用が貨幣にも依存する代表的家計モデルにおいて原文と同じ結論が得られるケースを福田〔1995〕が紹介している。
3）原文とほぼ同じ設定でライフサイクルを３期間に拡張したモデルにおいて，２期間循環が生じる条件を Bahttacharya and Russell〔2003〕で検討している。
4）もちろん，前節のように資源が直接賦与される状況を仮定しても結論は何ら修正されない。

l_i^τ ($\tau = t, t+1$) だけを労働力として投入し，投入した労働量と同量の財を生産する。すべての時点において各ライフサイクルで生産される財は同質であり，完全競争市場において価格 p_t で取引される。なおすべての財はそのままの状態では将来に持ち越すことができないものと仮定される。そこで資源を将来に持ち越す唯一の手段として貨幣の存在が仮定される[5)]。t 期においてライフサイクル 1 に属する消費者は財の売却収益[6)] $p_t l_1^t$ の一部で名目貨幣残高 m_t を入手する。この貨幣は（名目価値が）減価することなくライフサイクル 2 に持ち越され，これと $t+1$ 期における財の売却収益 $p_{t+1} l_2^{t+1}$ の合計で消費支出を行う。したがって t 期に生まれた消費者が各ライフサイクルで直面する予算制約はそれぞれ，

$$p_t l_1^t = p_t c_1^t + m_t, \tag{3-1a}$$

$$p_{t+1} l_2^{t+1} + m_t = p_{t+1} c_2^{t+1}, \tag{3-1b}$$

で与えられる。

最後に Grandmont〔1985〕では，t 期に生まれた消費者の瞬間効用関数は消費 c_i^τ に加えて余暇 $l_i - l_i^\tau$ にも依存するとした上で一般的な関数形で仮定されている。だが，ここでは生涯効用関数とともに，

$$v_t = \frac{\left(u[c_1^t, l_1 - l_1^t]\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{\left(u[c_2^{t+1}, l_2 - l_2^{t+1}]\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \tag{3-2a}$$

$$u[c_i^\tau, l_i - l_i^\tau] = \left(c_i^\tau\right)^\alpha \left(l_i - l_i^\tau\right)^{1-\alpha}, \tag{3-2b}$$

と特定化する（ただし $0 < \alpha < 1$）[7)]。Grandmont〔1985〕においては，相対的危険回避度をあらわすパラメータ γ (> 0) が各ライフサイクルで異な

5) この経済で流通する貨幣総額は M で一定であると仮定される。原文では名目貨幣供給変化率が一定であるケースも分析しているが，本ノートではこの可能性を扱わないことにする。

6) 原文では消費者は労働力を企業に提供して賃金を得る状況が考えられている。各企業の生産技術は労働のみに依存し，かつ労働投入係数が1の生産技術が仮定されているため，消費者に支払われる賃金は（均衡において）p_t に一致する。だから本ノートのように企業の存在を仮定せず消費者が直接財を生産・販売する状況を想定することは，モデルの結論に本質的な影響を与えない。

7) なお (3−2b) 式において σ を代替の弾力性を表すパラメータとして，CES 型関数，

る値をとる状況（かつ資産の非減少関数）が考えられているが，本ノートでは生涯を通じて同じγの値を持つと仮定する。また本節では，彼に合わせて割引要因βを1としておく。

3．2．貨幣需要関数の導出

以下本節では，$l_1 > l_2$を仮定して消費者の貨幣需要関数を導出しよう。Grandmont〔1985〕にしたがって，消費者は次の2段階の意思決定を行っているものとする。

- 第1段階：（3－2a）式を最大にするようにm_tを決める。
- 第2段階：（3－2b）式を最大にするようにc_i^τ, l_i^τを決める。

最初に第2段階の意思決定についてみていこう。先決したm_tを所与として，各消費者はライフサイクル1で（3－1a）式，ライフサイクル2で（3－1b）式を制約条件にして（3－2b）式の最大化問題をそれぞれ解く。その答えは，

$$\left(c_1^t, l_1^t\right) = \left(\alpha\left(l_1 - \frac{m_t}{p_t}\right), \alpha l_1 + \frac{(1-\alpha)m_t}{p_t}\right), \tag{3－3a}$$

$$\left(c_2^{t+1}, l_2^{t+1}\right) = \left(\alpha\left(l_2 + \frac{m_t}{p_{t+1}}\right), \alpha l_2 - \frac{(1-\alpha)m_t}{p_{t+1}}\right), \tag{3－3b}$$

で与えられる。そして（3－3）式を（3－2a）式に代入して間接効用関数は，

$$v_t = \frac{A^{1-\gamma}}{1-\gamma}\left\{\left(l_1 - \frac{m_t}{p_t}\right)^{1-\gamma} + \left(l_2 + \frac{m_t}{p_{t+1}}\right)^{1-\gamma}\right\} \equiv V\left[m_t\right], \tag{3－4}$$

となって[8)]，これが第1段階での目的関数となる。ゆえに消費者の貨幣需要関数は，

$$u[c_i^\tau, l_i - l_i^\tau] = \left\{\alpha\left(c_i^\tau\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\left(l_i - l_i^\tau\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right\}^{\frac{\sigma}{\sigma-1}},$$

を仮定しても，本節で得られる結論は同じである。

8）ただし$A \equiv \alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}$である。

$$m_t = \frac{p_{t+1}\left(l_1\theta_{t+1}^{1/\gamma} - l_2\right)}{1+\theta_{t+1}^{1/\gamma-1}}, \tag{3−5}$$

となる。ただし $\theta_{t+1} \equiv p_t/p_{t+1}$ であり，１プラスインフレ率の逆数である。なお（3−5）式において $m_t \geq 0$ であるためには，

$$\theta_{t+1} \geq \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{\gamma} \equiv \bar{\theta}, \tag{3−6}$$

でなければならない。$l_1 > l_2$ より $\bar{\theta} < 1$ であることが容易に分かり，以下ではこの条件を満たすものとして検討を進めていく。

3. 3.　1階差分方程式の性質

次に t 期における貨幣市場の均衡についてみていこう。

t 期における貨幣需要はすべてライフサイクル１に属する消費者が行い，その額は m_t である。他方同期における貨幣供給はすべてライフサイクル２に属する消費者が持つ貨幣 m_{t-1} で行われる。そして両者が一致するところで貨幣市場の均衡が成立する[9]。（3−5）式を使ってこの関係を書き換えると，

$$\frac{l_1\theta_t^{1/\gamma} - l_2}{1+\theta_t^{1/\gamma-1}} = \frac{l_1\theta_{t+1}^{1/\gamma} - l_2}{\theta_{t+1}\left(1+\theta_{t+1}^{1/\gamma-1}\right)}, \tag{3−7}$$

という θ_t に関する１階差分方程式に集約できる。これによって Grandmont〔1985〕のモデルにおけるマクロ均衡が記述されるが，以下では彼にしたがって（3−7）式を $t+1$ 期の θ の値が t 期の θ の値を決めるバックワードの差分方程式，$\theta_t = \varphi[\theta_{t+1}]$ と書いておく[10]。

9）このもとで，経済の資源制約を満足することを容易に証明することができる。

10）通常貨幣を伴う動学分析においては，このような表現で分析を進めていく（こうして得られる動学を backward dynamics という）。その理由は以下の通り。
　t 期でライフサイクル１に属する消費者は $t+1$ 期の価格 p_{t+1}，すなわち θ_{t+1} に関する予測にもとづいて貨幣を需要する。厳密にはこの予測が $t+1$ 期で正しく実現する保証はない（原文ではこれを考慮した分析も行っている）が，各消費者の完全予見を前提にすることで予測値と実現値が常に一致する。この需要は $m_{t-1} = M$ を通じて満たされるから，ここから p_t すなわち（p_{t-1} が既知のため）θ_t が決定される。

この関係式の性質については，次の定理が成立する。

Theorem 3.1　*1階差分方程式*$\theta_t = \varphi[\theta_{t+1}]$ *は以下の性質を満たす。*

① *定常値は*$\theta = \bar{\theta}, 1$ *の2つある。*

② $0 < \gamma < 1$ *のとき*$\varphi[\theta_{t+1}]$ *は一様増加関数であり，*$\varphi'[\bar{\theta}] = 1/\bar{\theta} > 1$, $0 < \varphi'[1] < 1$ *である。*

③ $\gamma > 1$ *のとき，*$\varphi[\theta_{t+1}]$ *は*$\theta_{t+1} = \hat{\theta}$ *のもとで最大値を持つ。*

④ $1 < \gamma < \tilde{\gamma}$ *ならば*$0 < \varphi'[1] < 1$，$\gamma > \tilde{\gamma}$ *ならば*$-1 < \varphi'[1] < 0$ *である。*

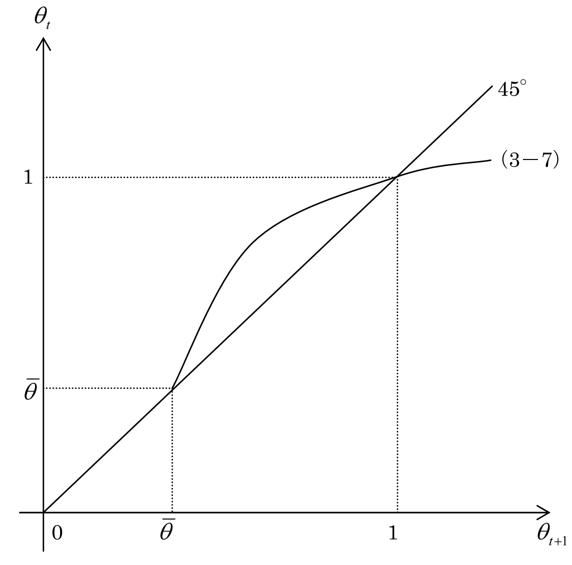
〔証明〕3. 6. (a) 参照

この定理にもとづいて（3−7）式を図示したものが図3−1である。このうち(a)はγが$0 < \gamma < \tilde{\gamma}$を満たすケース[11]，そして(b)は$\gamma > \tilde{\gamma}$のケースをそれぞれ描いている。いずれのケースにおいても$\theta_t = \theta_{t+1} = \bar{\theta}, 1$で定常状態が成立する。このうち$\theta = \bar{\theta}$は消費者に貨幣が保有されない定常状態，$\theta = 1$は保有されるそれを表しており，前者を非貨幣均衡，後者を貨幣均衡とそれぞれよんでいる。

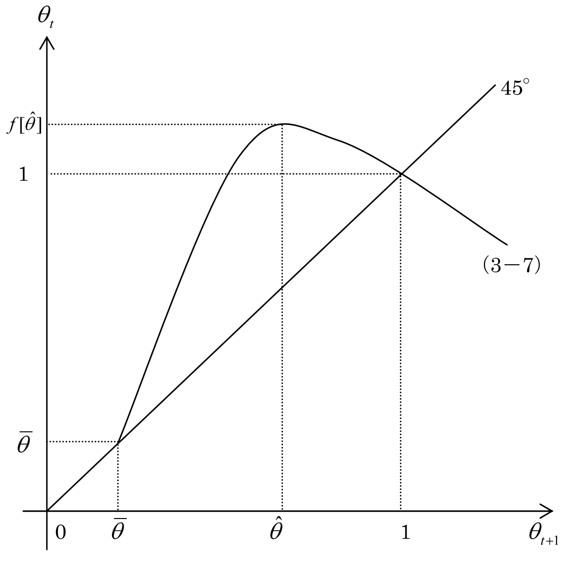
3. 4. 周期的変動の可能性

ところでもし消費者が遠い将来におけるθ_tの値を予測するなら，各期において彼らは$\theta_t = 1$となるように行動して持続的に貨幣均衡が成立するだろう。たとえば，0期でライフサイクル1に属する消費者がs期におけるθの値を適当に$\theta_{t+1} = \theta_s$と定め，そこから時間を遡ってθの値を予測していくと，図3−1より早晩$\theta = 1$に到達する。そして0期においてこの状態

11）厳密に言えば，$1 < \gamma < \tilde{\gamma}$のとき$\hat{\theta} > 1$のもとで（3−7）式は最大値をもつ。だが以降で検討する動学的性質は（3−7）式が一様増加関数のケースと変わらない。そのため，2つのケースを一括して扱うことにする。



(a)　$0 < \gamma < \tilde{\gamma}$



(b)　$\gamma > \tilde{\gamma}$

図３－１　(3−7) 式の形状

を選択すれば，それ以降の時点において消費者にはこの状態を逸脱する動機がもはや存在しないからである。ところが世代重複モデルにおいてはこの議論は成り立たない。なぜなら，t 期でライフサイクル１に属する消費者の最大の関心事は（3－6）式より $t+1$ 期における θ がどのようになるのかであって，$t+2$ 期以降の θ の動態を考える必要がないからである。こうして Grandmont〔1985〕では，初期値 θ_0 から出発する経済が性質の異なる定常状態の間をどのように推移していくのかが問題となる。そこで本項では，（3－7）式がある θ_t から出発して一定期間後にもとの水準に戻る「周期解」を持つ可能性について検討する。

（a）２期間循環の存在条件

はじめに（3－7）式が前節で示した２期間循環を持つ可能性について検討するが，ここでは（3－7）式を直接利用するのを避けて，一般的議論から接近してみることにする。

すべての t に対して $x_t \geq 0$ である数列 $\{x_t\}$ の動態を記述するバックワードの１階差分方程式 $x_t = f[x_{t+1}]$ を考える（関数 f は連続微分可能であるとする)。（3－7）式との対応を踏まえ，この差分方程式は $x = 0, a$（ただし $a > 0$）という２つの定常値をもち，また一貫して $f'[0] > 1$ を仮定する。この差分方程式において２期間循環が生じるのは，f を１回逐次代入（これが「自己反復」と呼ばれる作業である）した関数 $x_t = f\big[f[x_{t+2}]\big] \equiv f^2[x_{t+2}]$ において，

$$\begin{cases} x^* = f^2[x^*], \\ x^* \neq f[x^*], \end{cases} \tag{3－8}$$

を同時に満たす x^* が存在し，かつ $\{x_t\}$ の軌道がこの x^* を通るときである。この x^* を２周期解という[12)]。では，この差分方程式において２期間循環はどのような条件のもとで生じるのだろうか。

12）より詳細な周期解の定義については Azariadis〔1993〕，西村・矢野〔2007〕などを参照されたい。

最初に f が一様増加関数であるケースを考えよう。これについては f^2 の1階微分，

$$\left(f^2[x_{t+2}]\right)' \equiv \frac{dx_t}{dx_{t+2}} = f'[x_{t+1}]f'[x_{t+2}] > 0, \qquad (3-9)$$

より，f が一様増加関数である限り f^2 も一様増加関数である。ゆえにこのケースでは，(3−8) 式を満たす x^* は存在しないことが分かる[13)]。

次に $x_{t+1} = b < a$ で f が最大値をもつケースを考えよう。これは $f'[0] > 1$ を仮定する限り $f'[a] < 0$ であることを意味する。また仮定から，$b < a = f[a] < f[b]$ であることも分かる。この性質は図３－２の上半分で示している。ここで f の自己反復をイメージして，$x_{t+1} = b = f[x_{t+2}]$ を満たす x_{t+2} を考える。これは図３－２の下半分にあるように，一般に２つ存在する。ここでは小さ（大き）い方を c（c'）とおく。すると x_{t+2} 軸において $c < b < a < c'$ が成立する。これを念頭におけば，$x_t = f^2[x_{t+2}]$ の性質に関する次の補題を証明することができる。

Lemma 3.1　*$x_t = f^2[x_{t+2}]$ は $x_{t+2} = c, c'$ のときに極大値，$x_{t+2} = b$ のときに極小値を持つ。*

〔証明〕3. 6.（b）参照

この Lemma をもとに $x_t = f^2[x_{t+2}]$ を描いたものが図３－３である。図３－２を考慮してこれをみれば，$x_{t+2} = c, c'$ における極大値が同じ値を取り（これが最大値となる），$x_{t+2} = b$ における極小値が $f^2[b] < b$ となっている。このもとで（3−8）式を満たす x^* が２つ存在し，これが２期間循環をもたらす２周期解となる。

13）同様の方法で f が一様増加関数の場合，$n > 2$ なる全ての自然数において n 期間循環が生じないことを証明することができる。

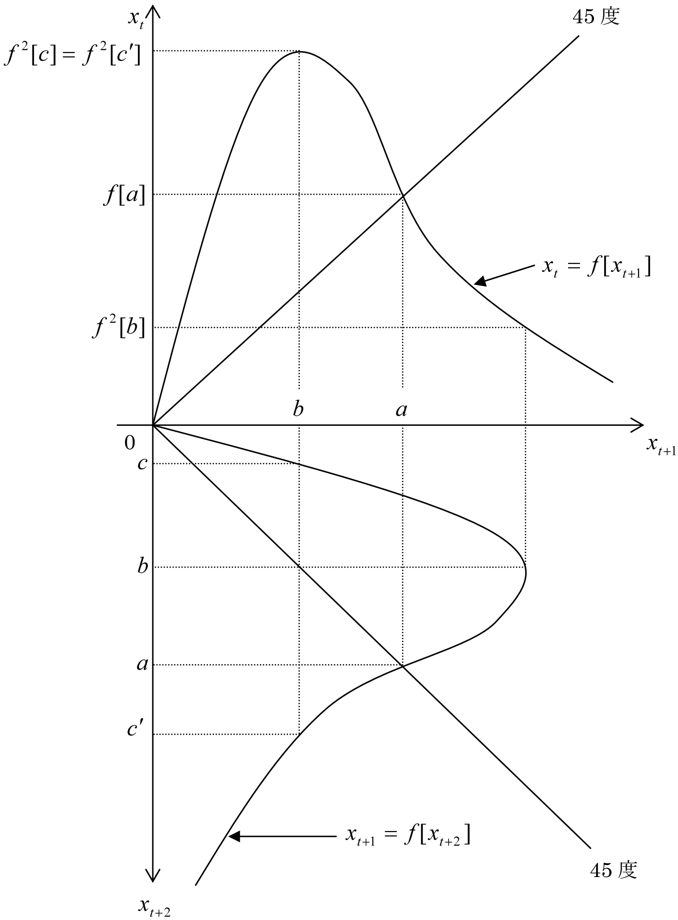


図3－2　$x_t = f[x_{t+1}]$ の自己反復

ところで，図3－3にあるような2周期解が存在するためには $f^2[b] < b$ でなければならない。だがこれが成立するかどうかは f の性質に依存する。いま $f'[0] > 1$ を仮定しているから $\left(f^2[0]\right)' > 1$ である。だから $\left(f^2[a]\right)' > 1$ ならば，f の連続性から $f^2[b] < b$ が保証される。いま考えているケースは $f'[a] < 0$ であったから，(3−9) 式より，

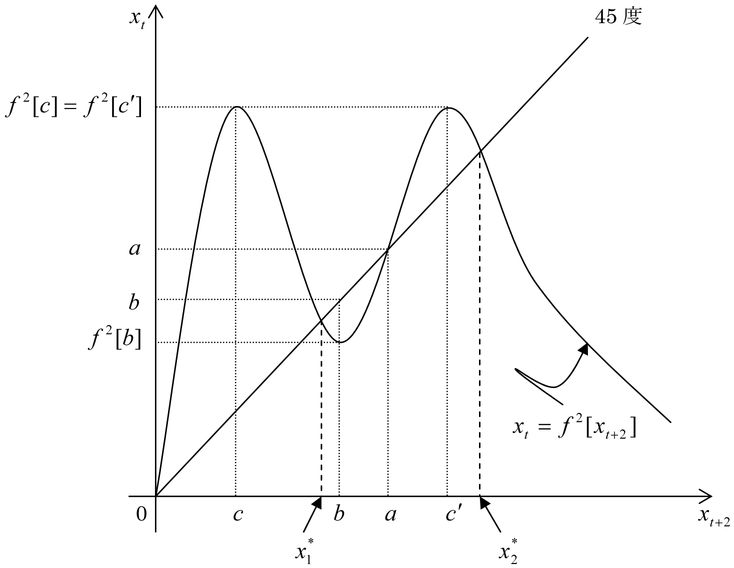


図 3 － 3　$x_t = f^2[x_{t+2}]$ の形状と 2 周期解の存在

$$f'[a] < -1, \tag{3－10}$$

であることと同値である。かくして 2 期間循環の存在に関する次の定理を得る。

Theorem 3.2　*$x=0, a$ を定常値に持つ 1 階差分方程式 $x_t = f[x_{t+1}]$ において $f'[a] < -1$ ならば，2 期間循環をもたらす 2 周期解が存在する*[14]。

ところが Theorem 3.1を踏まえると，次の定理が成り立つ。

Theorem 3.3　*1 階差分方程式（3－7）式において 2 期間循環は生じない。*

14）厳密に言えば，周期解の存在とともにその安定性についても調べなければならないが，今回については捨象する。調べる必要が生じた場合には，次回以降のノートで検討することにしたい。

（b） 3 期間循環の存在条件

次に，Grandmont〔1985〕のモデルにおいて 3 期間循環（Three-period cycles）の生じる条件について検討してみよう。

先ほどと同じ基本性質（$x=0, a$ で定常値を持ち，$f'[0]>1$）をもつバックワードの 1 階差分方程式 $x_t = f[x_{t+1}]$ を考える。3 期間循環とは，この差分方程式を 2 回自己反復させた関係式 $x_t = f\Big[f\Big[f[x_{t+3}]\Big]\Big] \equiv f^3[x_{t+3}]$ において，

$$\begin{cases} x^* = f^3[x^*], \\ x^* \neq f^2[x^*], \\ x^* \neq f[x^*], \end{cases} \tag{3−11}$$

を同時に満足する周期解 x^* が存在し，かつ $\{x_t\}$ の軌道がこの x^* を通るときをいう。そして（3−11）式を満足する x^* のことを 3 周期解という。

次に追加の仮定として，f が $x_{t+1}=b<a$ で最大値をもち，かつ（3−10）式を満たすとしよう。このとき 2 期間循環が生じるから，$f^2[b]<b$ である。そしてもし，

$$f\Big[f^2[b]\Big] = f^3[b] < b, \tag{3−12}$$

ならば，図 3 − 4 にあるように b の周辺に（3−11）式を満たす x^* が複数存在するはずで，これが 3 周期循環をもたらす 3 周期解となる[15)]。もし $f^2[b]<b$ ならば，f が区間 $[0, b]$ において一様増加関数だから $f^2[b]<f^3[b]$ である。これと（3−12）式を踏まえると，

$$f^2[b] < f^3[b] < b < a < f[b], \tag{3−13}$$

という不等式を得る。これが Grandmont〔1985〕で示される 3 期間循環をもたらす 3 周期解が存在するための条件である[16)]。

ところが Theorem 3.3より，次の定理が成立する。

15）（3−12）式は Grandmont〔1986〕で示された条件である。

16）Li and Yorke〔1975〕の結果を踏まえると，3 周期循環の存在は $n \geq 2$ を満たすすべての自然数を周期に持つ循環が存在することを意味する。

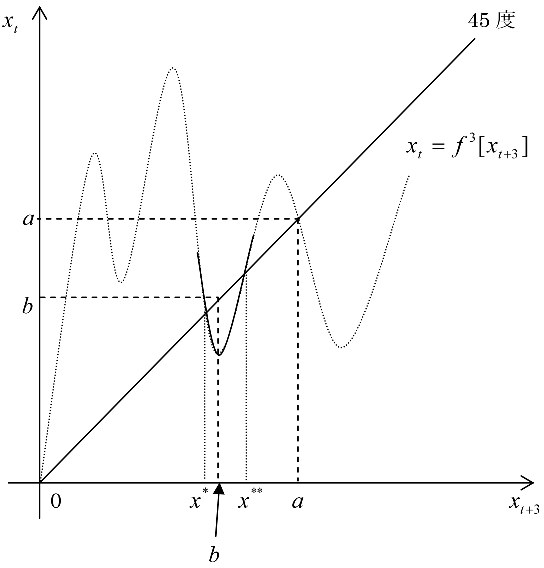


図３－４　３周期解の存在

Theorem 3.4　*１階差分方程式（3−7）式において，３期間循環は生じない。*

〔証明〕3．6．(c) 参照。

3．5．若干の考察

ゆえに前項での検討結果から，Grandmont〔1985〕のモデルにおける動学的性質に関して次の命題としてまとめることができる。

Proposition 3.1　*消費者の生涯効用が（3−2a）式で与えられる Grandmont〔1985〕モデルにおいて，*θ_t *はあらゆる周期的変動をもたず，(*$\theta_0 \neq 1$ *なる）任意の*θ_0 *から出発する経済は非貨幣均衡へ収束する。*

この命題にもとづき，図３－１(b)に具体的な動学経路の１つを示したのが

図3－5である。(3−5) 式を見れば，各主体は $t+1$ 期の θ に関する予測にもとづいて t 期の貨幣需要を決めている。これと（一定の）貨幣供給によって θ_t が $\bar{\theta} \leq \theta_t \leq f[\hat{\theta}]$ の範囲に決定される。すべての t に対してこの範囲で θ_t が推移するとして，図3－5でこの範囲を満足する位置に θ_0 を与えると，それ以降の時間経路は初めのうちは $\theta_t = 1$，すなわち貨幣均衡の周囲を振動するが，やがて $\theta_t = \bar{\theta}$，すなわち非貨幣均衡へ向かう様子が分かる。θ_t が小さくなるとはインフレが加速することを意味し，それが人々の実質貨幣残高を低めるのと同時に財の売却収益を高める。それを通じて人々の貨幣保有動機が失われてしまうからである。

だが Proposition 3.1（この基礎になる Theorem 3.3 および 3.4）は Grandmont〔1985〕の結論とは異なる。彼はライフサイクル2の相対的危険回避度が十分大きいほど，θ の周期的変動が生じやすいことを示している。つまり本ノートで周期的変動が生じなかった最大の要因は，相対的危険回避

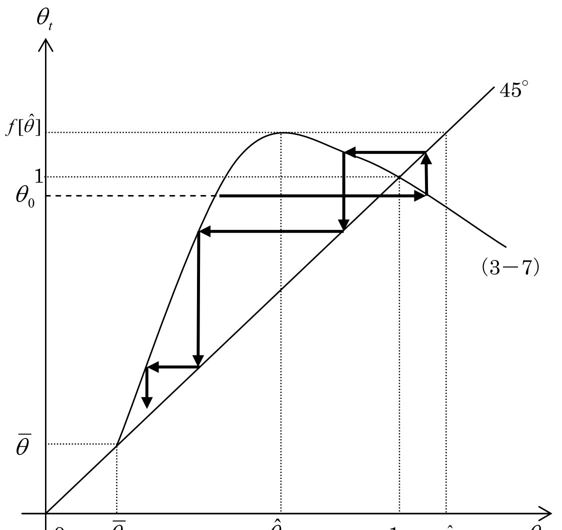


図3－5　(3−7) 式の動学経路

度γがライフサイクルを通じて同一の値をとると仮定したことによるものだと言える。

ところでGrandmont〔1985〕と類似の主張をしたものにBenhabib and Day〔1982〕がある。彼らは周期的変動が生じる条件の１つとして，異時点間の限界代替率が１を超えて十分大きい[17]ことを示している。ここでライフサイクル１における相対的危険回避度をγ_1，ライフサイクル２におけるそれをγ_2として，（3－1），（3－2）式および第２段階の意思決定における最適条件から彼らのいう異時点間の限界代替率（constrained marginal rate of substitution：*CMRS*）を計算すると，

$$CMRS=\frac{\left(c_1^t\right)^{\alpha(1-\gamma_1)-1}\left(l_1-l_1^t\right)^{(1-\alpha)(1-\gamma_1)}}{\left(c_2^{t+1}\right)^{\alpha(1-\gamma_2)-1}\left(l_2-l_2^{t+1}\right)^{(1-\alpha)(1-\gamma_2)}}=\frac{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{(1-\alpha)(1-\gamma_1)}\left(c_1^t\right)^{-\gamma_1}}{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{(1-\alpha)(1-\gamma_2)}\left(c_2^{t+1}\right)^{-\gamma_2}},$$

となる。これを見れば，確かに任意のc_i^τの組合せに対してγ_2が大きいほど*CMRS*の値は大きくなり，Grandmont〔1985〕の主張と整合的であることが分かる。だがBenhabib and Day〔1982〕の分析の主眼はライフサイクル１において借入を行う主体の消費経路の性質を明らかにすることであり，Grandmont〔1985〕のようにマクロ均衡として周期的変動が生じることを示しているわけではない。その意味で，両者の主張が完全に一致する保証はないことに注意されたい。

本節ではとりわけ（3－5）式を具体的に計算するために，各ライフサイクルにおける相対的危険回避度の値を同一水準と仮定した。そのことでGrandmont〔1985〕と異なる結論を得たのだが，裏を返せば，Monetary Cyclesにおいてはライフサイクル２の相対的危険回避度の値が決定的に重要であることが明らかになったわけである。

17）正確には１プラス人口成長率を超えることである。しかし本節では人口成長の可能性を捨象しているからこのような表現にしている。

3. 6. 数学注

（a）Theorem 3.1の証明

まず①については，（3−7）式で $\theta_t=\theta_{t+1}=\theta$ とおいて整理すると，

$$\frac{1}{1+\theta^{1/\gamma-1}}\left(1-\frac{1}{\theta}\right)\left(l_1\theta^{1/\gamma}-l_2\right)=0,$$

となることで証明できる。それ以外の証明のためには，次の補題の証明が必要である。

Lemma 3.2 *（3−7）式左辺を $L[\theta_t]$ とする。このとき任意の $\gamma>0$ に対して $\theta_t\geq\bar{\theta}$ の範囲で $L'[\theta_t]>0$ である。*

〔証明〕実際に（3−7）式左辺を θ_t で微分する。

$$L'[\theta_t]=\frac{\theta_t^{1/\gamma-2}\left\{(l_1\theta_t+l_2)/\gamma+\left(l_1\theta_t^{1/\gamma}-l_2\right)\right\}}{\left(1+\theta_t^{1/\gamma-1}\right)^2}>0. \qquad (3-14a)$$

（3−14a）式分母が正かつ（3−6）式より分子も正である。よって $L'[\theta_t]>0$ がいえる。

（Lemma 3.2の証明終）

Lemma 3.3 *（3−7）式右辺を $R[\theta_{t+1}]$ とする。このとき以下のことが成り立つ。*

① $0<\gamma<1$ ならば $\theta_{t+1}\geq\bar{\theta}$ の範囲で $R'[\theta_{t+1}]>0$ である。

② $\gamma>1$ ならば $R'[\theta_{t+1}]=0$ を満たす $\theta_{t+1}=\hat{\theta}>\bar{\theta}$ が存在する。そして $\bar{\theta}\leq\theta_{t+1}<\hat{\theta}$ の範囲で $R'[\theta_{t+1}]>0$，$\theta_{t+1}>\hat{\theta}$ の範囲で $R'[\theta_{t+1}]<0$ である。

③ $\hat{\theta}$ は $1<\gamma<\tilde{\gamma}$ の範囲で $\hat{\theta}>1$，$\gamma>\tilde{\gamma}$ の範囲で $\hat{\theta}<1$ である。

〔証明〕まず（3−7）式右辺を θ_{t+1} で微分する。

$$R'[\theta_{t+1}] = \frac{\theta_{t+1}^{1/\gamma-1}(l_1\theta_{t+1}+l_2)/\gamma-\left(l_1\theta_{t+1}^{1/\gamma}-l_2\right)}{\left\{\theta_{t+1}\left(1+\theta_{t+1}^{1/\gamma-1}\right)\right\}^2}. \qquad (3-14b)$$

ここから $R'[\theta_{t+1}]$ の符号条件を次のように確定することができる。

$$R'[\theta_{t+1}] \gtrless 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\gamma}-1\right)l_1\theta_{t+1}^{1/\gamma}+\frac{1}{\gamma}l_2\theta_{t+1}^{1/\gamma-1} \gtrless -l_2. \text{（複号同順）} \qquad (3-15)$$

（3－15）式の右側条件式において，$0<\gamma<1$ ならば任意の $\theta_{t+1} \geq \bar{\theta}$ において左辺が正値となる（①の証明）。

$\gamma>1$ のケースについては図により証明する。図3－6は（3－15）式右側条件式を図示したものである。これを見れば右側条件式左辺は一様減少関数であり，$\theta_{t+1}=\bar{\theta}$ を（3－15）式に代入すれば $(l_2/\gamma)\left\{1+(l_2/l_1)^{1-\gamma}\right\}>0$ である。そしてこの右下がりの曲線と $-l_2$ を表す直線とが1点で交わり，（3－15）式を等号で成立させる θ_{t+1} が1つ存在することが分かる。これを $\hat{\theta}$ とすれば，$\bar{\theta} \leq \theta_{t+1} < \hat{\theta}$ の範囲で（3－14b）右辺分子がプラスになり $R'[\theta_{t+1}]>0$，$\theta_{t+1}>\hat{\theta}$ では符号が逆転するから $R'[\theta_{t+1}]<0$ である（②の証明）。

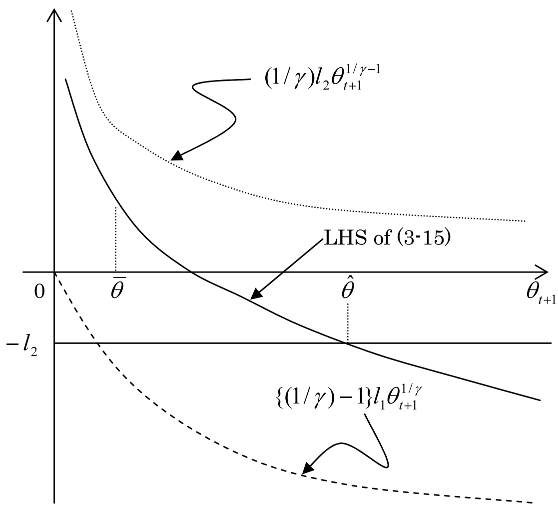


図3－6　$\hat{\theta}$ の存在

他方③について，$\hat{\theta}$ が1を上回るかどうかは $\theta_{t+1}=1$ のときに（3－15）式の符号がどのようになるのかに依存する。実際にこれを計算すると，

$$\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)l_1+\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)l_2 \gtrless 0 \Leftrightarrow \gamma \lessgtr \frac{l_1+l_2}{l_1-l_2} \equiv \tilde{\gamma}, \text{（複号同順）} \quad (3-16)$$

で与えられる。ここで（3－16）式で等号が成り立つときの γ を $\tilde{\gamma}$ とすると，$\tilde{\gamma}>1$ なのは明らかである。よって $1<\gamma<\tilde{\gamma}$ ならば $\hat{\theta}>1$，$\gamma>\tilde{\gamma}$ ならば $\hat{\theta}<1$ である。

（Lemma 3.3の証明終）

以上の準備のもとで，Theorem 3.1の残りの部分がすべて証明できる。

$\varphi'[\theta_{t+1}]$ は（3－7）式を全微分することで，

$$\frac{d\theta_t}{d\theta_{t+1}}=\varphi'[\theta_{t+1}]=\frac{R'[\theta_{t+1}]}{L'[\theta_t]}, \quad (3-17)$$

で与えられる。もし $0<\gamma<1$ ならば，Lemma 3.2および Lemma 3.3の①より $\varphi'[\theta_{t+1}]>0$ である。次に（3－14）式を（3－17）式に代入して2つの定常値で評価すれば，

$$\varphi'[\bar{\theta}]=\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{\gamma}=\frac{1}{\bar{\theta}}>1, \quad (3-18a)$$

$$\varphi'[1]=\frac{(l_1+l_2)/\gamma-(l_1-l_2)}{(l_1+l_2)/\gamma+(l_1-l_2)}, \quad (3-18b)$$

となる。(3－6）式より（3－18a）式は1を超え，しかもこれは γ の値に関係なく成立する。それと同時に $0<\varphi'[1]<1$ もいえる（②の証明)。

他方 $\gamma>1$ ならば，Lemma 3.3の②から $\theta_{t+1}=\hat{\theta}$ のもとで $\varphi'[\hat{\theta}]=0$，$\bar{\theta}\leq\theta_{t+1}<\hat{\theta}$ の範囲で $\varphi'[\theta_{t+1}]>0$，かつ $\theta_{t+1}>\hat{\theta}$ の範囲で $\varphi'[\theta_{t+1}]<0$ が成り立つ。ゆえに $\varphi[\theta_{t+1}]$ は $\theta_{t+1}=\hat{\theta}$ で最大値を持つことが分かる（③の証明)。

最後に，$\gamma>1$ であっても $\gamma<\tilde{\gamma}$ 未満ならば（3－18b）式は $0<\varphi'[1]<1$ であり，②のケースと変わらない。一方 $\gamma>\tilde{\gamma}$ ならば，Lemma 3.3の②お

よび③から（3－18b）式の符号は確実に負となる。そして$\varphi'[1]$が－1を上回るかどうかは，

$$\varphi'[1] \gtreqless -1 \Leftrightarrow \frac{2(l_1+l_2)}{\gamma} \gtreqless 0,\text{（複号同順）}$$

という条件によって決まる。だがこの条件は結局 $-1<\varphi'[1]<0$ であることを意味する。

（証明終）

（b）Lemma 3.1の証明

f が $x=b$ で最大値を持つから，$f'[b]=0$, $f''[b]<0$ が成り立つ。これを用いて証明される。

まず $x_{t+2}=b$ のケースから証明する。これを（3－9）式に代入すれば，

$$\left(f^2[b]\right)' = f'\left[f[b]\right]f'[b] = 0,$$

であり，ここにおいて極値を持つことが分かる。次に（3－9）式を x_{t+2} で微分すると，

$$\left(f^2[x_{t+2}]\right)'' \equiv \frac{d}{dx_{t+2}}\left(\frac{dx_t}{dx_{t+2}}\right) = \left(f'[x_{t+2}]\right)^2 f''[x_{t+1}] + f'[x_{t+1}]f''[x_{t+2}], \tag{3-19}$$

であり，これに $x_{t+2}=b$ を代入すると，

$$\left(f^2[b]\right)'' = f'\left[f[b]\right]f''[b],$$

となる。いま $f[b]>a>b$ だから $f'\left[f[b]\right]<0$ であり，ゆえに $\left(f^2[b]\right)''>0$，すなわち b は極小値に対応していることが分かる。

次に $x_{t+2}=c$ のケースを証明する。これを（3－9）式に代入すれば，

$$\left(f^2[b]\right)' = f'[b]f'[c] = 0,$$

であり，ここにおいても極値を持つことが確認できる。次に（3－19）式を $x_{t+2}=c$ で評価すれば，

$$\left(f^2[c]\right)'' = \left(f'[c]\right)^2 f''[b],$$

となる。ここから $\left(f^2[c]\right)''<0$，すなわち c は極大値に対応する。なお $x_{t+2}=c'$ については，c を c' に置き換えることで同様に証明できる。

（証明終）

（c）Theorem 3.4の証明

ここでは，（3−7）式において$\gamma > \tilde{\gamma}$のケースについて証明する（それ以外のケースは自明であるため省略)。このケースにおいては，

$$\hat{\theta} < 1 < \varphi[\hat{\theta}], \tag{3−20a}$$

であり（図３−１(b)参照)，Theorem 3.3から，

$$\varphi^2[\hat{\theta}] > \hat{\theta}, \tag{3−20b}$$

も成立する。（3−7）式は$\theta > \hat{\theta}$で一様減少関数であるから，（3−20b）式より，

$$\varphi\Big[\varphi^2[\hat{\theta}]\Big] = \varphi^3[\hat{\theta}] < \varphi[\hat{\theta}], \tag{3−21a}$$

そして（3−20a）の右側不等式より，

$$\varphi^2[\hat{\theta}] < 1 < \varphi^3[\hat{\theta}], \tag{3−21b}$$

がそれぞれ成立する。（3−20b）および（3−21）式を組み合わせると，

$$\hat{\theta} < \varphi^2[\hat{\theta}] < 1 < \varphi^3[\hat{\theta}] < \varphi[\hat{\theta}], \tag{3−22}$$

となって，（3−13）式に一致しない。

（証明終）

（なかむら・かつゆき／経済学部准教授／2010年１月８日受理）