# 弾性学と材料力学の歴史
# (II-9)

アイザック　トドハンター著
カール　ピアソン編著

(訳)　村上一男[1)]　並川宏彦[2)]　村上一實[3)]

〔232.〕 論文は，もし，初期応力 $\widehat{xx}_0$, $\widehat{yy}_0$, $\widehat{zz}_0$ がもとのひずみの対称面に関して対称であるならば，相互定数関係(i)に従属する応力—ひずみ関係(ii)に，

$\widehat{xx}$ に対して，$\widehat{xx}_0(1+u_x-v_y-w_z)$

$\widehat{yz}$ に対して，$\widehat{zz}_0 v_z+\widehat{yy}_0 w_y$

の項を加えなければならないことに注目して終っている。サン・ブナンは1863年の論文でこれらのことを訴えているが，すでに見たように，彼は実際そこでは少定数に対してそれらを証明しているに過ぎない〔本書第129節参照〕。

〔233.〕 **『円形口を通って強い圧力下で流れている円筒形の延性のある塊の色々な点の運動の計算；実験の結果にその結果を近づける方法に関する見解』**(*Calcul du mouvement des divers points d'un bloc ductile, de forme cylindrique, pendant qu'il s'écoule sous une forte pression par un orifice circulaire; vues sur les moyens d'en rapprocher les résultats de ceux de l'expérience.*),『報告集』(*Comptes rendus*), 第LXVI巻，1868年，1311—24頁。この論文は延性のある塊の部分の運動のみを扱っており，これらの運動を生じる応力を考慮していない。したがって，その方法は弾性の運動よりも流体力学的運動に近い。それはそれに言及しているトレスカ (Tresca) の独特な理論と同様，変形の純粋運動学に属している。アカデミーへのトレスカの通報について，サン・ブナンによって作成された一つの報告が上の論文の直前にある〔1305—11頁〕。それはトレスカの純粋運動理論を取り扱っており，批評している。

延性のある固体の流れあるいは容器から出た液体の流れを扱うサン・ブナンの論文は『報告集』の第LXVII巻，1868年，131—7頁，203—211頁，278—282頁と第LXVIII巻，1869年，221—237頁，290—301頁に見出される。それらはどの点で弾性あるいは材料強度の表題下に入るのか考えられない。

〔234.〕 **『等方弾性体内の色々な点が受ける非常に小さい変位の高次導関数を考慮に入れるときに圧力がとる値に関する覚え書』**(*Note sur les valeurs que prennent les pressions dans un solide élastique isotrope lorsque l'on tient compte des dérivées d'ordre supérieur des déplacements très-petits que leurs points ont éprouvés.*),『報告集』，第LXVIII巻，1869年，569—571頁。この覚え書は，変位—微分商の自乗を省略しないとき，弾性体の任意の点における引張応力と剪断応力に対する式を証明なしに示している。サン・ブナンは，彼の結果が少定数の考察から得られていると言っている。彼は次式を見出している。

$$\begin{aligned}\widehat{xx}=&\,\varepsilon_0\left(\theta+2\frac{du}{dx}\right)+\epsilon_1\left\{2\frac{d^2\theta}{dx^2}+\nabla^2\left(\theta+2\frac{du}{dx}\right)\right\}\\&+\varepsilon_2\left\{4\nabla^2\frac{d^2\theta}{dx^2}+\nabla^2\nabla^2\left(\theta+2\frac{du}{dx}\right)\right\}\\&+\varepsilon_3\left\{6\nabla^2\nabla^2\frac{d^2\theta}{dx^2}+\nabla^2\nabla^2\nabla^2\left(\theta+2\frac{du}{dx}\right)\right\}+\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{yz}=&\,\varepsilon_0\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)+\epsilon_1\left\{2\frac{d^2\theta}{dydz}+\nabla^2\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)\right\}\\&+\varepsilon_2\left\{4\nabla^2\frac{d^2\theta}{dydz}+\nabla^2\nabla^2\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)\right\}\end{aligned}$$

1) 立命館大学理工学部　名誉教授　2) 本学文学部　3) 大阪産業大学短期大学部

$$+\varepsilon_3\left\{6\nabla^2\nabla^2\frac{d^2\theta}{dydz}+\nabla^2\nabla^2\nabla^2\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)\right\}+\cdots\cdots$$

ここで，$\theta$ はいつもの通り膨張であり，$\nabla^2$ はラプラス演算子 $\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}$ である。また，$\varepsilon_0$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, …… は物体の弾性性質に依存する定数である。

サン・ブナンは次のことばで彼の覚え書を結んでいる。

この公式は，引き伸ばすよりも圧縮するときに，応力とひずみの間の関係がより速く変化するある種の弾性物体に関係のある問題を説明するのに多分役立つだろう。次のように，その物体に起こる振動は熱がなすようにそれらの寸法を増大するだろう。したがって，私が注目させる機会〔学術振興会 (*Société Philomathique*), 1855年10月20日，本書68節参照〕をもったように，膨張ひずみは最後の原子間作用が類似法則に従うことに帰することができる〔571頁〕。

**〔235.〕『非等方性非晶質弾性体の内部つり合いを表す4次偏微分方程式を解く第2種ポテンシャルについて』**(*Sur un potentiel de deuxième espèce, qui résout l'équation aux différences partielles du quatrième ordre exprimant l'équilibre intérieur des solides élastiques amorphes non isotropes*),『報告集』, 第 LXIX 巻，1869年，1107—1110頁。

この覚え書は次の第2種ポテンシャルのE. マテイユ (Mathieu) の討論に言及しているだけである。

$$\phi=\iiint f(\alpha,\beta,\gamma)\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}\cdot d\alpha d\beta d\gamma$$

それによって，方程式 $\nabla^2\nabla^2\phi=0$ を解くことができる。この方程式は等方性固体の取り扱いの中に出てくる。サン・ブナンは弾性のだ円体分布があるとき，弾性方程式を解く次式に言及している。本書140—1節参照。

$$\phi=\iiint f(\alpha,\beta,\gamma)\sqrt{\frac{(x-\alpha)^2}{A}+\frac{(y-\beta)^2}{B}+\frac{(z-\gamma)^2}{C}}\cdot d\alpha d\beta d\gamma$$

サン・ブナンは1869年のコルニュ (Cornu) の論文と，定数論争へのそれの関係を激賞している。この物理学者の著作についての以下の節を参照のこと。

**〔236.〕『弾性限度をこえた延性固体の変形の連続運動中の剪断と引張りあるいは圧縮への抵抗の2係数が等しいことの理論的検証』**(*Preuve théorique de l'égalité des deux coefficients de résistance au cisaillement et à l'extension ou à la compression dans le mouvement continu de déformation des solides ductiles au delà des limites de leur élasticité.*),『報告集』, 第 LXX 巻，1870年，309—11頁。

この覚え書の目的は，すべりと引張りの両方が塑性であるとき，すべりに対する抵抗係数と伸びあるいは縮みに対する抵抗係数が等しいことを証明することである。

サン・ブナンは，稜 $a$, $b$, $c$ の直六面体をとり，二つの面 $a\times b$ が $a$ の方向に弾性限度をこえて塑性すべりひずみ $\sigma\times c$ を生じる剪断力を受けると仮定する。もし，$K'$ が単位面積当たりに必要な力であるとき，この永久ひずみを生じるのに費やされた仕事は

$$K'ab\times\sigma\times c$$

である。すなわち，それは単位体積当たり $K'\sigma$ に等しい。

いま，この同じすべりひずみは大きさ $\sigma/2$ の斜め方向伸びと縮みによって生じさせることができるだろう。本書第1570*節参照。直六面体 $abc$ をとり，それを $a$ と $c$ に45°の角をなし，面 $a\times c$ の中にそれらの端面 $a'\times c'$ をもつ長さ $a'$ と高さ $c'$ で，同じ幅 $b$ の他の直六面体に分割しよう。永久伸びを生ずるために，$Kbc'$ で示される引張力を面 $bc'$ へ適用し，$Kba'$ で示された負の引張力を面 $ba'$ へ適用する必要がある。ここで，$K$ は伸びと縮みの**両方**に対する抵抗係数である。このことから，それぞれ $a'$ と $c'$ に平行に $\sigma/2$ の伸びと $\sigma/2$ の縮みを生じるために，

$$Kbc'\frac{\sigma}{2}a' \quad と \quad Kba'\cdot\frac{\sigma}{2}c'$$

に等しい仕事が必要である。すなわち，小さい柱体 $a'bc'$ の単位体積**当たり**

$$K\sigma$$

に等しい仕事が必要である。

しかし，この量は先の $K'\sigma$ に等しくなければならない。すなわち，$K'=K$ でなければな

らず，その結果はトレスカによって実験的に確かめられている。

サン・ブナンは次のように覚え書を結んでいる。

したがって，この理論は大胆な最初の概観ではこの仮定の正しいことを証明するが，しかし，非常に合理的に熟考するとき，受けさせる柱体底面の単位表面当たりの連続的引張りと圧縮に対する抵抗が等しいことを証明する，と私には思われる。もちろん，一般条件の下でこのことすべては非常に遅い動きばかりである，あるいはそれらの速度はそれらが生じる変形抵抗の中に入らないようなものと仮定していると思われる。

脚注において，彼は塑性材料の流れ曲線が実験的に得られるかもしれない方法を述べている。

証明は縮みの永久ひずみと伸びの永久ひずみに対する抵抗係数 $K_1$ と $K_2$ が等しいと仮定していることに注目しなければならない。そうでなければ，

$$K_1+K_2=2K'$$

を得るだろう。

読者は本書第1巻の877頁に述べた剪断および引張りの強さについてのクローンの結果と比べるとよかろう。

〔237.〕**『固体の小さな変形がすでにその内部に働いていたかなり大きい圧力あるいは弾性力にもたらす増加の公式——論文の序文の補足と修正。1863年の数学雑誌に掲載された各点のまわりの弾性分布など』**(*Formules des augmentations que de petites déformations d'un solide apportent aux pressions ou forces élastiques, supposées considérables, qui déjà étaient en jeu dans son intérieur.——Complément et modification du préambule du mémoire: Distribution des élasticités autour de chaque point, etc. qui a été inséré en 1863 au Journal de Mathématiques.*)〔本書127—152節参照〕。この論文は『**数学雑誌**』(*Journal de Mathématiques*)，第XVI巻，1871年，275—307頁に発表され，二つの部分に分けられている。**第1部**（275—291頁）はブリル（Brill）とブシネスク（Boussinesq）が1863年の論文で指摘した〔本書130節参照〕誤りを訂正することで占められている。**第2部**は弾性定数 $|xxxx|$ などと初期ひずみの六成分の間の関係を扱っている。それは291—307頁を占めており，『**報告集**』(*Comptes rendus*)の第LXXII巻，1871年の355頁と391頁の覚え書の題目を構成している。

〔238.〕問題の誤りは本書第I巻〔1619*節参照〕に実際に示された。すなわち，ひずみ，$s_x$，$\sigma'_{yz}$ と変位—微分商の間の真の関係が，それらの最も一般的な形式で型[1)]

$$\left.\begin{aligned}&s_x+\frac{1}{2}s_x^2=u_x+\frac{1}{2}(u_x^2+v_x^2+w_x^2)\\&\sigma'_{yz}(1+s_y)(1+s_z)=v_z+w_y+u_yu_z+v_yv_z+w_yw_z\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

であるが，しかし，これらはサン・ブナンの1847年と1863年の論文において彼の取った値ではない。本書1622*節と130節参照。したがって，多定数仮説からコーシーの方程式を引き出そうとするサン・ブナンの試みは間違っている。

ポテンシャル・エネルギーの完全な値はブシネスクが指摘していたように

$$\left.\begin{aligned}\phi=\phi_0&+\widehat{xx}_0\left(s_x+\frac{1}{2}s_x^2\right)+\cdots\cdots+\cdots\cdots\\&+\widehat{yz}_0\sigma'_{yz}(1+s_y)(1+s_z)+\cdots\cdots+\cdots\cdots\\&+\phi_1\end{aligned}\right\}\cdots(\mathrm{ii})$$

であり，1863年の論文において仮定したように

$$\phi=\phi_0+\widehat{xx}_0s_x+\cdots\cdots+\cdots\cdots+\widehat{yz}_0\sigma'_{yz}+\cdots\cdots+\cdots\cdots+\phi_1$$

ではない〔本書第130節参照〕。しかし，式(ii)は**少定数仮説に基づく分子による考察からのみ推論されている**。事実はグリーンが実際にした〔『論文集』，298—9頁〕のように，多定数仮説に基づいて $\phi$ を本書1619*節のひずみ成分 $\epsilon_x$, $\epsilon_y$, $\epsilon_z$, $\eta_{yz}$, $\eta_{zx}$, $\eta_{xy}$ の一次や二次の項に展開することができることである。しかし，結果として生じる係数がどの範囲まで初期応力成分の関数であるかを決めることはできない。これは分子による何かの仮定をすることもまた必要であるらしい。

〔239.〕ポテンシャル・エネルギーについての式(ii)で始まり，〔サン・ブナンが1863年の

1) $\sigma'_{yz}$ は本書1621*節の $\sigma_{yz}$ とは異なり，それはすべり角の余弦であり，余接ではない。本書1564*節のサン・ブナンのすべりの定義参照。

論文の中で二重自己補正誤差によってなしていたように〕コーシーの方程式に到達するだろうが，一般化したフックの法則の単純な仮定を基に，式 (ii) に到達するという望みは断念しなければならない。論文の第 1 部のさらに一二の点に注目してよい。

(*a*) 二次の微小量に対して，

$$\left.\begin{aligned} s_x &= u_x + \frac{1}{2}(v_x^2 + w_x^2) \\ \sigma_{yz} &= v_z + w_y + u_y u_z - v_y w_y - v_z w_z \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(\mathrm{iii})$$

である。

これはブリルによって初めて認められた。サン・ブナンの論文の 279 頁参照。

(*b*) 仕事関数が $s_x$, $s_y$, $s_z$, $\sigma_{zy}$, $\sigma_{xz}$, $\sigma_{yx}$ のベキで展開することができると仮定し，

$$\left.\begin{aligned} \phi = \phi_0 &+ \widehat{xx}_0 s_x + \widehat{yy}_0 s_y + \widehat{zz}_0 s_z \\ &+ \widehat{zy}_0 \sigma_{zy} + \widehat{xz}_0 \sigma_{xz} + \widehat{yx}_0 \sigma_{yx} \\ &+ \phi_2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(\mathrm{iv})$$

と書くならば，初期応力を含む $\phi$ の部分を $\phi_2$ にしており，したがって，(ii) 式の $\phi_1$ とは異なる。このようにして，応力について次の形を得る。

$$\left.\begin{aligned} \widehat{xx} &= \widehat{xx}_0(1 - v_y - w_z) - \widehat{xy}_0(v_x - u_y) \\ &\quad + \widehat{zx}_0(u_z - w_x) + \widehat{xx}_2 \\ \widehat{yz} &= \widehat{yz}_0(1 - u_x - v_y - w_z) + \widehat{yy}_0 w_y + \widehat{zz}_0 v_z \\ &\quad + \widehat{zx}_0 v_x + \widehat{xy}_0 w_x + \widehat{yz}_2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(\mathrm{v})$$

しかし，$\widehat{xx}_2$ と $\widehat{yz}_2$ はコーシーの $\widehat{xx}_1$, $\widehat{yz}_1$〔本書 129節 (ii) 参照〕と同じ形であると同時に，少定数研究によって示されているように，実際には相当する初期応用によって増加した定数をもつだろう。このようにして，

$$\left.\begin{aligned} |xxxx|_2 &= |xxxx| + \widehat{xx}_0 \\ |yyyz|_2 &= |yyyz| + \widehat{yz}_0 \\ |zzyz|_2 &= |zzyz| + \widehat{yz}_0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(\mathrm{vi})$$

である。

これらの初期応力が変化した定数の値にどのように現れるかを多定数理論で決定することは不可能である。それは (ii) 式の証明のために少定数に後戻りさせる。(vi) と (v) を組み合わせた結果は後者をコーシーの公式に変換する。本書 129 節 (i) 参照。

〔240.〕 論文の第 2 部は次の問題を扱っている。**応力の初期状態が $\widehat{xx}_0$, $\widehat{xy}_0$ などであるとき，$|xxxx|$, $|xxxy|$, $|xxyz|$ などが弾性定数であるならば，これらの定数はこの初期応力状態以前の弾性定数 $|xxxx|_0$, $|xxxy|_0$, $|xxyz|_0$ などによって決定する必要がある。**

サン・ブナンは問題を少定数の方針で取り扱っている。略記号で〔本書 143 節参照〕，次式を得る。

$$\begin{aligned} &|x^4| \text{ または } |y^2z^2| \text{ または } |y^3z| \text{ または } |x^2yz| \\ &\quad = \frac{\rho}{2}\Sigma m \frac{d}{rdr}\,\frac{f(r)}{r}\{x^4 \text{ または } y^2z^2 \text{ または } \\ &\qquad\qquad y^3z \text{ または } x^2yz\} \qquad \cdots\cdots(\mathrm{vii}). \end{aligned}$$

さらに，$x_0$, $y_0$, $z_0$ が初期ひずみ以前の別の分子に関する分子 $m$ の位置，$u_0$, $v_0$, $w_0$ がそのひずみによるそれの変位，そして $x$, $y$, $z$ がひずみ後の相対位置であるならば，次式を得る。

$$x = x_0 + x_0\frac{du_0}{dx_0} + y_0\frac{du_0}{dy_0} + z_0\frac{du_0}{dz_0} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2u_0}{dx_0^2}x_0^2 + \cdots\right),$$

$$\begin{aligned} r - r_0 &= \frac{1}{r_0}\left[x_0^2\frac{du_0}{dx_0} + \cdots\cdots + \cdots\cdots \right. \\ &\qquad \left. + y_0z_0\left(\frac{dv_0}{dz_0} + \frac{dw_0}{dy_0}\right) + \cdots\cdots + \cdots\cdots\right] \\ &\quad + \frac{1}{2r_0^2}\left[\left(\frac{du_0}{dx_0}x_0 + \frac{du_0}{dy_0}y_0 + \frac{du_0}{dz_0}z_0\right)^2\right. \\ &\qquad + \left(\frac{dv_0}{dx_0}x_0 + \cdots\cdots + \cdots\cdots\right)^2 \\ &\qquad \left. + \left(\frac{dw_0}{dx_0}x_0 + \cdots\cdots + \cdots\cdots\right)^2\right] \\ &\quad - \frac{1}{2r_0^2}\left[x_0^2\frac{du_0}{dx_0} + y_0^2\frac{dv_0}{dy_0} + \cdots\cdots + x_0y_0\left(\frac{du_0}{dy_0} + \frac{dv_0}{dx_0}\right)\right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{2r_0}\left(x_0^3\frac{d^2u_0}{dx_0^2} + \cdots\cdots\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{rdr}\left(\frac{f(r)}{r}\right) &= \frac{d}{r_0dr_0}\left(\frac{f(r_0)}{r_0}\right) \\ &\quad + (r - r_0)\frac{d}{dr_0}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d}{dr_0}\left(\frac{f(r_0)}{r_0}\right) + \cdots\cdots, \end{aligned}$$

二乗と積を削除するとき，

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\rho_0}{\left(1 + \frac{du_0}{dx_0}\right)\left(1 + \frac{dv_0}{dy_0}\right)\left(1 + \frac{dw_0}{dz_0}\right) + A} \\ &= \rho_0(1 - s_{x_0} - s_{y_0} - s_{z_0}), \end{aligned}$$

ただし，

$$A = -\frac{dv_0}{dz_0}\,\frac{dw_0}{dy_0} - \frac{dw_0}{dx_0}\,\frac{du_0}{dz_0} - \frac{du_0}{dy_0}\,\frac{dv_0}{dx_0} + \cdots\cdots$$

方程式 (vii) に代入し，

$$\begin{aligned} &|x^4|_0 \text{ または } |y^2z^2|_0 \text{ または } |y^3z|_0 \text{ または } |x^2yz|_0 \\ &\quad = \frac{\rho_0}{2}\Sigma m\frac{d}{r_0dr_0}\left\{\frac{f(r_0)}{r_0}\right\} \\ &\qquad \times \{x_0^4 \text{ または } y_0^2z_0^2 \text{ または } y_0^3z_0 \text{ または } x_0^2y_0z_0,\} \end{aligned}$$

を思い出すならば，次の代表的な結果を得る。

$$\begin{aligned} |x^4| &= |x^4|_0(1 - 3u_{x_0} - v_{y_0} - w_{z_0}) \\ &\qquad + 4(|x^3y|_0u_{y_0} + |x^3z|_0u_{z_0}), \\ |y^2z^2| &= |y^2z^2|_0(1 - u_{x_0} + v_{y_0} + w_{z_0}) \\ &\qquad + 2(|yz^3|_0v_{z_0} + |xyz^2|_0v_{x_0} + |xy^2z|_0w_{x_0} + |y^3z|_0w_{y_0}), \\ |y^3z| &= |y^3z|_0(1 - u_{x_0} + 2v_{y_0}) + 3(|y^2z^2|_0v_{z_0} \\ &\qquad + |xy^2z|_0v_{x_0}) + (|xy^3|_0w_{x_0} + |y^4|_0w_{y_0}), \\ |x^2yz| &= |x^2yz|_0(1 + u_{x_0}) + 2(|xy^2z|_0u_{y_0} + |xyz^2|_0u_{z_0}) \\ &\qquad + |x^3z|_0v_{x_0} + |x^2z^2|_0v_{z_0} + |x^3y|_0w_{x_0} + |x^2y^2|_0w_{y_0}. \end{aligned}$$

ここで，$u_{x_0}$，…… は $du_0/dx_0$…… を表し，また，応力 $\widehat{xx}_0$，$\widehat{yz}_0$ が $u_{x_0}$ $v_{y_0}$……$u_{z_0}$…… などの所定の関数であるので，新しい係数 $|x^4|$…… は古い係数 $|x^4|_0$…… と初期応力によって表すことができる。これらの結果は明らかに本書 616* 節の公式のより一般的な場合に過ぎない。続く 297—304 頁はこれらの結果を考察し，または応力をそれらによって表す他の方法に関係している。

〔241.〕 特殊な場合としてもと等方性材料の棒が初期引張力 $\widehat{xx}_0$ があるとして引張力 $\widehat{xx}$ を受けた場合を取り上げることにしよう。次式を得る。

$$s_{x_0}=\widehat{xx}_0/E_0,\quad s_{y_0}=s_{z_0}=-s_{x_0}/4.$$

さらに，$|x^2y^2|_0=\lambda=\mu$ ならば，$|x^4|_0=3\lambda$ また $E_0=5\lambda/2$ となる。

このようにして，

$$|x^4|=3\lambda\left(1-\frac{5}{2}s_{x_0}\right),\quad |y^4|=|y^4|_0=3\lambda,$$

$$|x^2y^2|=|x^2z^2|=\lambda(1+s_{x_0}),$$

$$|y^2z^2|=\lambda\left(1-\frac{3}{2}s_{x_0}\right),$$

$$|y^3z|=|x^2yz|=\text{etc.}=0.$$

129 節の方程式 (i) のコーシーの公式で示されるように，引張形式に代入すると，

$$\widehat{xx}=\widehat{xx}_0\{1+s_x-2s_y\}+3\lambda\left(1-\frac{5}{2}s_{x_0}\right)s_x+2\lambda(1+s_{x_0})s_y,$$

$$\widehat{yy}=0=3\lambda s_y+\lambda(1+s_{x_0})s_x+\lambda\left(1-\frac{3}{2}s_{x_0}\right)s_y.$$

を得る。

そこへ，第 2 方程式から，

$$s_y\left(4-\frac{3}{2}s_{x_0}\right)=-(1+s_{x_0})s_x,$$

すなわち　$s_{x_0}^2$ を省略して，

$$s_y=-\frac{1}{4}s_x\left\{1+\frac{11}{8}s_{x_0}\right\}$$

が求まる。

第 1 式に代入して，

$$\widehat{xx}=\widehat{xx}_0+\frac{5\lambda}{2}s_{x_0}\times\frac{3}{2}s_x+\lambda s_x\left\{\frac{5}{2}-\frac{139}{16}s_{x_0}\right\},$$

$$=\widehat{xx}_0+\frac{5\lambda}{2}s_x\left(1-\frac{79}{40}s_{x_0}\right),$$

すなわち　$$\frac{\widehat{xx}-\widehat{xx}_0}{s_x}=E_0-\frac{79}{40}\widehat{xx}_0$$

が容易に導ける。

このようにして，$E$ が新しい伸び係数ならば，

$E=E_0-\dfrac{79}{40}\widehat{xx}_0$ を得る。

これは，大きい初期引張りは伸び係数の値をある程度まで変えることができることを示している。大きい初期引張りは**伸び係数の値**をわずかに**減少する**。サン・ブナンはわれわれの記号法で，

$$E=E_0+\frac{11}{2}\widehat{xx}_0$$

を得るが，私はこの結果が正しいとは思わない。それは伸び係数の**増加**を示すだろう。事実，サン・ブナンは初期応力後の伸び－縮み比＝1/4 と置くが，〔したがって，305頁に彼は

$$s_z=s_y=-1/4s_x$$

と書いている〕，しかし，私にはこの比が

$$=-(1+s_{x_0})\Big/\left(4-\frac{3}{2}s_{x_0}\right)=-\frac{1}{4}\left(1+\frac{11}{8}s_{x_0}\right)$$

で，また $s_{x_0}=\widehat{xx}_0/E_0=0$ のとき，すなわち初期応力がないとき，単に $=-1/4$ であると思われる。

実際的関心よりも理論的関心の問題である。なぜならば，$E$ が 30,000,000 lbs/in² であったと仮定しても，$\widehat{xx}_0$ がせいぜい 40,000 から 60,000 lbs/in² より以上でありそうもない。したがって，$E$ の変化は 140,000 から 200,000 lbs 以上に，すなわち，せいぜい $E$ の 1/150 に達しないだろう。それはどの材料においても均一性の不足で，実際にはほとんど実験誤差の範囲内にある。

〔242.〕『リウヴィユの雑誌』(*Journal de Liouville*) の第 XV 巻，1870年にサン・ブナンの二つの論文があるが，それらはわれわれの分野の外にあるような，すなわちぼろぼろの土の塊の安定性を扱うのが適当と考えた問題に関係している。問題の論文の来歴を簡単に述べよう。1867年に，モーリス・レヴィ (Maurice Lévy) は**『最近運ばれた土のつり合いの合理的理論に関する試論および支えの壁の安定性の計算へのその応用』**(*Essai sur une théorie rationnelle de l'équilibre des terres fraîchement remuées, et ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement.*) と題した論文をアカデミーへ提出していた〔**『リウヴィユの雑誌』**，第 XVIII 巻，1873年，241—300頁に発表された〕。この論文は報告のためにサン・ブナンを含む委員会へ付託されていた。報告は『報告集』(*Comptes rendus*)，第 LXX 巻，1870

年，217—28頁に出たし，また『**リウヴィユの雑誌**』の第XV巻，237—49頁に再版された。委員会はもちろんレヴィはレヴィの結果の大部分を含んでいたランキンの論文『**ぼろぼろの土の安定性について**』(*On the Stability of Loose Earth*)〔『**哲学会報**』(*Phil. Trans.*), 1857年，9—27頁〕を知らなかったらしい。レヴィはコーシーの応力定理から出発していた〔本書**606***節と**610***節参照〕し，またある一般方程式に到達していた。サン・ブナンは彼の最初の覚え書の中でレヴィの方程式〔第XVIII巻の250—63頁〕を第1次近似まで解き，どこかの数学者がさらに続行することを希望している。これはブシネスクによってなされた。彼は『**リウヴィユの雑誌**』の第XV巻の267—70頁を占める論文の中で第2次近似まで進んだ。後に，サン・ブナンは前の頁に続く271—80頁を占める第二論文においてすべての問題を再考した。彼は脚注でランキンの研究の優先権を認めている。サン・ブナンとブシネスクの論文は『**報告集**』，第LXX巻，1870年，217—28頁，717—24頁，751—4頁および894—7頁にも出ている。

〔**243.**〕『**モーリス・レヴィの論文に関する報告**』(*Rapport sur un mémoire de Maurice Lévy*),『**報告集**』，第LXXIII巻，1871年，86—91頁。これは三元次における塑性の一般物体一応力方程式を確立したレヴィの論文についてのサン・ブナンやその他の人の報告である。本書**250**節参照。報告は力学の新しい部門を進めているとして，レヴィの論文をほめている。『それについてわれわれの内の一人は最もよいものとは思っていないが**流体固体力学**(*d'hydrostéréo-dynamique*) という用語を思い切って付けた』。研究のこの部門は後に**塑性力学** (*plastico-dynamics*) というよりよい言葉で呼ばれた。われわれはそれを単に**塑性** (*plasticity*) と呼ぶだろう。

〔**244.**〕『**延性のある固体の力学について**』(*Sur la mécanique des corps ductiles*),『**報告集**』，第LXXIII巻，1871年，1181—1184頁。サン・ブナンはここで彼の最初の名称—流体固体力学—を**塑性力学**に取り替えている。彼は『**リウヴィユの雑誌**』において，この主題についての彼の論文への**補足**に言及している。本書**245**節 (iii) 参照。そして，ねじりの下での円筒と環状曲げの下での柱体の塑性の二つの例について，そこで扱っている。この覚え書の目的は，トレスカによって得られた半ば塑性の円筒のねじりに対する公式が，上に述べた**補足**のサン・ブナンの公式より以上には寄与していないことを示すことである。しかるに，それは同時に半ば経験的な仕方で得られている。トレスカの公式は新しい定数 $K'$ を含むのに，サン・ブナンは弾性すべり係数 $\mu$ と塑性係数 $K$ にのみ依存している。サン・ブナンは，彼の円筒の中で単に二つの領域，弾性領域と塑性領域に区別し，トレスカは弾性が塑性に変わる中間領域，あるいはトレスカが名付けているように，流動性を仮定している。サン・ブナンの議論は理論的な利点をもつが，トレスカの中間領域に相当する物理的な何かが存在することはことによるとあるかも知れないと思われる。

〔**245.**〕 次に，サン・ブナンによる一連の興味ある重要な論文へ方向を変えなければならない。そこでは，彼は塑性方程式を扱っている。これらは，

(i) 『**弾性が最初の状態に戻ることのできる限界以上で，延性のある固体に作用する内部運動の微分方程式の確立に関する論文**』(*Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état.*),『**数学雑誌**』(*Journal de Mathématiques.*), 第XVI巻，1871年，308—316頁。〔『**報告集**』(*Comptes rendus*), 第LXX巻，1870年，473頁も参照〕。

(ii) 『**弾性が最初の状態に戻ることのできる限度以上で，延性のある固体の内部運動の一般方程式に関する論文の抜粋**』(*Extrait du mémoire sur les équations générales des mouve-*

*ments intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état.*) **モーリス・レヴィ氏による。同書**，369—372頁。〔『報告集』，第LXX巻，1323頁と，本書**263**節に述べたサン・ブナンの訂正もまた参照。論文そのものの若干の評価が1870年に示されるだろう。〕

(iii) **『延性のある固体の内部運動の「不定」微分方程式など……「明確な」すなわちこの固体の限界に関係のある方程式に関するサン・ブナン氏の1870年3月7日の論文やレヴィ氏の1870年6月19日の論文の補足——応用——』** (*Complément aux mémoires du 7 mars 1870 de M. de Saint-Venant et du 19 juin 1870 de M. Lévy sur les équations différentielles 'indéfinies' du mouvement intérieur des solides ductiles etc.; ...Equations 'définies' ou relatives aux limites de ces corps;* —— Applications.)，**同書**，373—382頁。

〔**246.**〕 最初の論文は塑性理論の歴史の興味ある記述で始まる。それはトレカスの論文や純粋運動学によって解を得ようとするトレスカとサン・ブナン自身の試みを述べている。問題が本質上運動学的であるだけでなく機械的であり，また単なる連続性の考察だけでなく応力の考察を含んでいることが指摘されている。

第一に，流体運動の通常方程式は，異なる方向における圧力の不同を含む他のものによって置き換えられなければならない。したがって，流体力学方程式のよく知られた形，

$$\frac{dp}{dx}=\rho\left(X-\frac{du}{dt}-u\frac{du}{dx}-v\frac{du}{dy}-w\frac{du}{dz}\right)$$

は塑性力学形の

$$\frac{d\widehat{xx}}{dx}+\frac{d\widehat{xy}}{dy}+\frac{d\widehat{xz}}{dz}$$

$$=-\rho\left(X-\frac{du}{dt}-u\frac{du}{dx}-v\frac{du}{dy}-w\frac{du}{dz}\right)\quad\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

となる。

符号の変化は圧縮から**引張り**への変化による。

これに，連続方程式

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0\qquad\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

を加えなければならない。

(i)と(ii)によって与えられた四つの方程式は材料の流れ〔速度成分 $u$, $v$, $w$〕と応力成分の間の関係を示す。塑性状態の材料は非圧縮性として取り扱われている。

〔**247.**〕 さて，トレスカは，材料が塑性段階にあれば，任意の面を横切る最大剪断力は，彼が様々の材料に対して実験的に確かめた定数値$K$を持たなければならないことを示している。最大すべりに対するこの一定の抵抗を，今後は**塑性係数**（*plastic modulus*）と名付けよう。したがって，塑性力学方程式を得るために，

任意の面を横切る最大剪断力$=K$……(iii)

であることを示さなければならない。

再び，トレスカは最大剪断力の方向がまたすべりの最大速度の方向であることを示している。そこで，これは最後の条件：

最大剪断力と最大すべり速度は共通の方向である ……(iv)

を構成する。

条件(iii)と(iv)とともに方程式(i)と(ii)は完全な塑性力学方程式を与えるだろう。

〔**248.**〕 サン・ブナンは，平面上の塑性と名付けてよい場合，すなわち，運動が $x$, $z$ の平面に平行なすべての平面内で同じである場合のみを扱っている。したがって，座標$y$は彼の結果から消えている。

$x'$, $z'$ を $x$, $z$ の2直交軸と角$\alpha$をなす二つの直交軸とすると，本書**1368***節の第1公式から

$$\widehat{x'z'}=\frac{\widehat{zz}-\widehat{xx}}{2}\sin 2\alpha+\widehat{zx}\cos 2\alpha$$

であることが容易に分かる。

これは $$\tan 2\alpha=\frac{\widehat{zz}-\widehat{xx}}{2\widehat{xz}}\qquad\cdots\cdots(\mathrm{v})$$

に対してそれの最大値をとる。そのとき，強度

$$\frac{1}{2}\sqrt{4\widehat{zx}^2+(\widehat{zz}-\widehat{xx})^2}$$

となる。

したがって，条件(iii)は

$$\widehat{zx}^2+\left(\frac{\widehat{zz}-\widehat{xx}}{2}\right)^2=K^2\qquad\cdots\cdots(\mathrm{vi})$$

となる。

さらに，すべり速度は

$$\frac{dw'}{dx'}+\frac{du'}{dz'}=\left(\frac{dw}{dz}-\frac{du}{dx}\right)\sin 2\alpha+\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)\cos 2\alpha$$

で与えられることが容易に見出され，したがって，

$$\tan 2\alpha=\frac{\dfrac{dw}{dz}-\dfrac{du}{dx}}{\dfrac{dw}{dx}+\dfrac{du}{dz}}$$

のとき，それの最大値をとる。

このことから，条件 (iv) は

$$\frac{\widehat{zz}-\widehat{xx}}{2\widehat{xz}}=\left(\frac{dw}{dz}-\frac{du}{dx}\right)\Big/\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)\quad\cdots\cdots\text{(vii)}$$

となる。

結局，方程式 (i) と (ii) はこの場合次のようなより簡単な形式となる。

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\widehat{xx}}{dx}+\frac{d\widehat{xz}}{dz}&=-\rho\left(X-\frac{du}{dt}-u\frac{du}{dx}-w\frac{du}{dz}\right)\\ \frac{d\widehat{xz}}{dx}+\frac{d\widehat{zz}}{dz}&=-\rho\left(Z-\frac{dw}{dt}-u\frac{dw}{dx}-w\frac{dw}{dz}\right)\\ \frac{du}{dx}+\frac{dw}{dz}&=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\text{(viii)}$$

方程式 (vi)，(vii) および (viii) は平面上の塑性に対する方程式である。

〔249.〕 サン・ブナンは，これらの方程式でさえ，最も簡単な場合を除くいかなる場合に対しても解くことが困難であろうと述べている。しかし，彼は，円筒の塑性流れに対する方程式を得ることは困難ではないだろうと示唆している。

サン・ブナンは第1の論文に対する最後の節〔316頁〕で次のように述べている。

私はもっぱら最後の指摘だけをしよう。すなわち，上述の六つの応力成分 $\widehat{xx}$，……，$\widehat{xy}$ に，よく知られているように，規則正しく動く非粘性流体中の相対すべり速度による動摩擦を生じるものを表す項 $2\varepsilon u_x$，$2\varepsilon v_y$，$2\varepsilon w_z$，$\varepsilon(v_z+w_y)$，$\varepsilon(w_x+u_z)$，$\varepsilon(u_y+v_x)$ をそれぞれ加えると，塑性固体，したがって完全な固体方程式は，変形が起こる速度があまり大きくならず，一層極端に小さくならないで，そして，No. 3 で述べた一般に無視しうるこの固有の抵抗を引き起こすことができる場合へ拡張されるだろう。これらすべての項を含む同じ方程式は，**粘性流体**の規則正しい運動（言い換えれば，渦巻きや乱れとなるには充分速くない）を表すのに適当だろう。この規則正しい運動には次の2種類の接線成分がなければならない。その一つは速度 $u$, $v$, $w$ とともに変化し，$\varepsilon$ とその導関数の積で見積もられ，他のものはこの速度の大きさに無関係，すなわち，運動の大きさがどうあろうとも同じで粘性に帰せられる。その粘性の $K$ は特殊な係数を表す。

〔250.〕 本書の245節で言及している第2の論文で，モーリス・レヴィは二組の結果を確立している。第一に，彼は塑性の一般方程式を得ている。次に，彼は円筒形塑性流れの特別の場合を考えている。

ここでは，一般方程式を引用するが，レヴィの論文のこれらの式を得る方法についての意見に対する後の議論に言及する。

一般方程式 (i) と (ii) はこの場合成立する。条件 (iii) は

$$4(K^2+q)(4K^2+q)+27r^2=0\quad\cdots\cdots\text{(ix)}$$

となる。ここで，

$$q=\Delta_y\Delta_z+\Delta_z\Delta_x+\Delta_x\Delta_y-\widehat{yz}^2-\widehat{zx}^2-\widehat{xy}^2,$$
$$r=\Delta_x\widehat{yz}^2+\Delta_y\widehat{zx}^2+\Delta_z\widehat{xy}^2-\Delta_x\Delta_y\Delta_z-2\widehat{yz}\,\widehat{zx}\,\widehat{xy},$$

また，$\widehat{xx}-\Delta_x=\widehat{yy}-\Delta_y=\widehat{zz}-\Delta_z=\dfrac{1}{3}(\widehat{xx}+\widehat{yy}+\widehat{zz})$

である。

条件 (iv) は

$$\frac{\widehat{yz}}{v_z+w_y}=\frac{\widehat{zx}}{w_x+u_z}=\frac{\widehat{xy}}{u_y+v_x}=\frac{\widehat{yy}-\widehat{zz}}{2(v_y-w_z)}=\frac{\widehat{zz}-\widehat{xx}}{2(w_z-u_x)}\quad\cdots\cdots\text{(x)}$$

となる。

したがって，(i)，(ii)，(ix) および (x) は必要な方程式である。

〔251.〕 371頁において，レヴィは，平面上の塑性の場合にサン・ブナンが応力 $\widehat{yy}$ を考慮していないことに注目している。方程式 (x) から，$v_y=0$ であり，したがって式 (ii) から $w_z+u_x=0$ であるので，次式を得る。

$$\frac{\widehat{yy}-\widehat{zz}}{2u_x}=\frac{\widehat{zz}-\widehat{xx}}{-4u_x},$$

すなわち，

$$\widehat{yy}=\frac{1}{2}(\widehat{zz}+\widehat{xx})\quad\cdots\cdots\text{(xi)}$$

〔252.〕 372頁では，円筒形塑性流れに対する方程式を得る。$z$ が軸方向，$r$ が半径方向，$\phi$ が子午線角，$u$, $w$ が半径方向速度，軸方向速度ならば，それらは形式

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\widehat{rr}}{dr}+\frac{d\widehat{rz}}{dz}+\frac{\widehat{rr}-\widehat{\phi\phi}}{r}&=-\rho\left(R_0-\frac{du}{dt}-u\frac{du}{dr}-w\frac{du}{dz}\right)\\ \frac{d\widehat{rz}}{dr}+\frac{d\widehat{zz}}{dz}+\frac{\widehat{rz}}{r}&=-\rho\left(Z_0-\frac{dw}{dt}-u\frac{dw}{dr}-w\frac{dw}{dz}\right)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\text{(xii)},$$

$$\frac{du}{dr}+\frac{u}{r}+\frac{dw}{dz}=0 \qquad \cdots\cdots(\text{xiii}),$$

$$4\widehat{rz}^2+(\widehat{rr}-\widehat{zz})^2=4K^2 \qquad \cdots\cdots(\text{xiv}),$$

$$\frac{\widehat{rz}}{w_r+u_z}=\frac{\widehat{rr}-\widehat{zz}}{2(u_r-w_z)}=\frac{\widehat{rr}-\widehat{\phi\phi}}{2(u_r-u/r)} \quad \cdots\cdots(\text{xv}).$$

をとる。

条件(xiv)が十分でも常に正しくないことは後に分かるだろう。本書263節参照。

塑性運動が非常に小さく，また重力の影響が省略できるとき，概して，方程式(i)と(xii)の右辺は零に等しいとおいてよい。

〔253.〕 表題が本書の245節に示されている第3の論文において，サン・ブナンは，速度が省略されるならば，平面上の塑性の方程式は未知の補助関数 $\psi$ を発見することになるという意見を最初に述べている。ここで，

$$\widehat{xx}=\frac{d^2\psi}{dz^2},\quad \widehat{zz}=\frac{d^2\psi}{dx^2},$$

$$\widehat{xz}=-\frac{d^2\psi}{dzdx},$$

そして，

$$4\left(\frac{d^2\psi}{dxdz}\right)^2+\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}-\frac{d^2\psi}{dz^2}\right)^2=4K^2 \quad \cdots\cdots(\text{xvi}).$$

である。

彼はこの方程式が近似的に解かれるであろうことを示唆している。

〔254.〕 サン・ブナンは次に塑性の限界条件あるいは表面条件，すなわち塑性状態において材料の一部の境界で成立する条件の取扱いに進んでいる。さきの方程式は**不定方程式**（*équations indéfinies*）と呼ばれているが，彼はこれらを**定方程式または決定方程式**（*équations définies ou déterminées*）と名付けている。

これらの条件には色々の種類がある。物質の塊のある部分だけが塑性であり〔トレスカによって**活動地帯**と呼ばれた〕，他の部分は弾性のままである，すなわち塑性状態を通り抜けて後弾性へ戻る（たとえば，オリフィスを通過した後の金属の射出部）かも知れない。

条件は三つの部類に分けられる。

第一。物質の弾性を保持しているかあるいは回復している各点において，材料の表面に関係するもの。このような面が引張力 $T_e$ にさらされるとする。また，弾性応力を $\widehat{xx}_e\cdots\cdots\widehat{xy}_e$ とし，添字 $e$ はただそれらの弾性性質に関係するとする。表面条件の形式は

$$\widehat{xx}_e\cos(nx)+\widehat{xy}_e\cos(ny)+\widehat{xz}_e\cos(nz)$$
$$=T_e\cos(lx) \qquad \cdots\cdots(\text{xvii})$$

となるだろう。ここで，$n$ は表面法線方向であり，$l$ は加えた引張力 $T_e$ の方向である。

第二。材料は境界面において塑性段階にあり，$T_p$ は引張力である。$\widehat{xx}_p\cdots\cdots\widehat{xy}_p$ が塑性応力を示すのであれば，方程式の形式は，

$$\widehat{xx}_p\cos(nx)+\widehat{xy}_p\cos(ny)+\widehat{xz}_p\cos(nz)$$
$$=T_p\cos(lx) \qquad \cdots\cdots(\text{xviii})$$

である。

第三。材料が塑性から弾性へ変化する表面において成立しなければならない方程式。これらは次の形式である。

$$(\widehat{xx}_e-\widehat{xx}_p)\cos(nx)+(\widehat{xy}_e-\widehat{xy}_p)\cos(ny)$$
$$+(\widehat{xz}_e-\widehat{xz}_p)\cos(nz)=0 \quad \cdots\cdots(\text{xix})$$

方程式(xvii)—(xix)において，弾性応力と塑性応力はそれぞれ弾性一般方程式と塑性一般方程式から得られなければならない。

〔255.〕 378—380頁において，サン・ブナンは，半径 $r_0$ から $r$ までの外側輪状帯に塑性が始まるまでねじりを受けた半径 $r$ の直円柱の特別な場合を扱っている。$M$ がねじり偶力で，$\mu$ がすべり係数，また $\tau$ がねじり角であれば，

$$M=2\pi\left[\mu\tau\frac{r_0^4}{4}+K\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r_0^3}{3}\right)\right]$$

であることを，彼は容易に見出している。しかるに，弾性と塑性の表面において，

$$\mu\tau r_0=K$$

でなければならない。

そのとき，$\tau<\dfrac{K}{\mu r}$，あるいは $M<\dfrac{\pi r^3}{2}K$ であるかぎり，塑性はないだろう。

もし，$\tau$ がこれより大きければ，

$$M=\pi K\left(\frac{2}{3}r^3-\frac{1}{6}\frac{K^3}{\mu^3\tau^3}\right)$$

を得る。

〔256.〕 380—381頁には，長方形断面の柱体の等たわみ，すなわち「円形」たわみによって生じた塑性の場合がある。

$2c$ を曲げ平面における高さ，$2b$ を断面の幅，$2c_0$ は弾性を保持している中央部分の高さ，$1/\rho$ を一様な曲率とする。そのとき，曲げモーメント $M$ が

$$M=\frac{4}{3}\frac{E}{\rho}bc_0^3+4Kb(c^2-c_0^2)$$

で示されることは容易に分かる。

塑性部分と弾性部分の分離の表面において，

$$\frac{Ec_0}{\rho}=2K$$

である。ここから，

$$M=4Kb\left(c^2-\frac{4}{3}\frac{K^2\rho^2}{E^2}\right)$$

であることが分かる。ここで，$\rho<\dfrac{Ec}{2K}$ であるに違いない，すなわち柱体は弾性のままであろう。

〔257.〕 サン・ブナンは，特殊な場合に流れがとる一般形を最初に**実験的**に確かめた後にだけ，塑性方程式の近似解を試みることができるであろうことを結論的に示している。

サン・ブナンは弾性と塑性が連続であると仮定している，と言ってよかろう。このことが実験で確証されると私には少しも思われない。塑性が始まる前，長い間応力はひずみに比例していない。本書第Ｉ巻の890頁の線図と244節の私の意見を参照。