# 弾性学と材料力学の歴史
# (Ⅱ-10)

アイザック　トドハンター著
カール　ピアソン編著
(訳)　村上一男[1)]　並川宏彦[2)]　村上一實[3)]

〔258.〕 塑性力学(*plastico-dynamics*)，すなわち塑性についてのサン・ブナンの二つの論文が『報告集』(*Comptes rendus*)，第LXXIV巻，1872年にある。それらには次のような表題が付いている。

(1) **『中実円筒または中空円筒で，種々の状態に置かれた延性ブロックを，連続的に変形し得る力の大きさについて』**(*Sur l'intensité des forces capables de déformer avec continuité des blocs ductiles, cylindriques, pleins ou évidés, et placés dans diverses circonstances.*)〔1009—1015頁，1017頁までの脚注とともに〕。

(2) **『同じ軸のまわりに対称である塑性的運動について，レヴィ氏が提出した方程式の一つに加える補足について』**(*Sur un complément à donner à une des équations présentées par M. Lévy pour les mouvements plastiques qui sont symétriques autour d'un même axe.*)〔1083—1087頁〕。

これらの論文は『**リウヴィユの雑誌**』の中のサン・ブナンとレヴィの論文への補遺と見なしてよい。本書245—57節参照。

〔259.〕 塑性変形の一般原理は，各点での最大剪断応力が〔1869年のトレスカの論文で$K$で示されている〕特定の定数に等しいことである，とサン・ブナンが彼の最初の論文で述べている。ポプキンスの定理によって，各点で異なる面を横切る引張応力の間の最も大きな差は $2K$ に等しいはずであるということになる。本書 1368* 節参照。

サン・ブナンは二つの特殊な場合と三つ目の場合を近似的に取り扱っている。以下の三節をそれらの討論に当てよう。

〔260.〕 第一のものは延性金属の直六面体の場合である。

座標軸をそれらの辺に平行に取り，それらの面が一様な引張応力 $\widehat{xx}$, $\widehat{yy}$, $\widehat{zz}$ を受けるならば，これらの引張応力は材料の任意の点で主引張応力となるだろう。また，$\widehat{xx}\sim\widehat{zz}$ が最大の差であるならば，

$$\widehat{xx}\sim\widehat{zz}=2K \qquad \cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

であることが必要だろう。

この条件は $\widehat{xx}=-\widehat{yy}=-\widehat{zz}=K$

あるいは $\widehat{xx}=-\widehat{yy}=-\widehat{zz}=-K$

ならば，満たされる。

このことについて，サン・ブナンは次のように述べている。

> 伸びに対するものであろうと縮みに対するものであろうと塑性固体の抵抗が一定で，剪断抵抗に等しいことを，トレスカ氏とともに理解しなければならないのは，この観点においてである〔1010頁〕。

この場合の伸長は任意の底面上での円筒の伸長であり，それについては $\widehat{yy}=\widehat{zz}$ であるが，$K$に等しくない。言い換えれば，$\widehat{rr}$ で示す横方向すなわち半径方向引張応力はすべて等しく，また縦方向引張応力 $\widehat{xx}$ はそれらよりも大きい。そこで，塑性の条件として，

$$\widehat{xx}=2K+\widehat{rr} \qquad \cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

を得る。

1) 立命館大学理工学部　名誉教授　2) 本学文学部　3) 大阪産業大学短期大学部

半径方向引張応力が縦方向引張応力より大きければ，

$$\widehat{rr}=2K+\widehat{xx} \qquad \cdots\cdots\cdots(\text{iii})$$

を得る。

(ii) または (iii) のいずれの方程式からも，変分によって

$$\delta\widehat{xx}=\delta\widehat{rr}$$

が得られる。すなわち，縦方向引張応力の任意の増分は横方向引張応力と同じ増分を伴う。これは，**塑性固体内で圧力は流体内のように伝達される**，というトレスカの原理である。しかし，トレスカは仕事の原理によってそれを証明している。

〔261.〕 サン・ブナンが取り扱った第二の場合は，軸に垂直な二つの固定された剛平面の間に置かれた中空直円筒の場合である。外面は圧力 $p$ を受けていて，材料を塑性状態にするのに必要な内部圧力 $p_1$ が必要である。

この問題は材料の各点の速度——ここでは，半径方向だけであるが——を導入することによって解くことができる。塑性材料について，これらの速度を決める原理は，第一に要素の体積に変化がないこと，第二に材料の各要素面積において剪断応力が零である方向はすべり速度が零である方向でなければならないことである。後者の原理は引張応力の差の半分と対応する伸び速度との比が二つずつ等しいことを含んでいる。

材料の任意の要素の軸から半径方向の距離を $r$，円筒の外半径と内半径を $R$ と $R_1$，$r$ における要素の半径方向速度を $V$，同じ要素で半径方向，子午面内，および軸に平行な引張応力を $\widehat{rr}$，$\widehat{\phi\phi}$，$\widehat{zz}$ とする。そのとき，円環要素 $2\pi rdrdz$ のつり合いと体積の保存について，次式が必要である。

$$\frac{d\widehat{rr}}{dr}+\frac{\widehat{rr}-\widehat{\phi\phi}}{r}=0,\quad \frac{dV}{dr}+\frac{V}{r}=0\cdots \qquad \cdots\cdots(\text{iv})$$

さらに，第二の原理から，

$$\frac{\widehat{rr}-\widehat{zz}}{dV/dr}=\frac{\widehat{rr}-\widehat{\phi\phi}}{dV/dr-V/r}\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots(\text{v})$$

となる。

式(iv)の第二式と式(v)の間で $dV/dr$ を消去して，

$$\widehat{rr}-\widehat{\phi\phi}=2(\widehat{rr}-\widehat{zz})=2(\widehat{zz}-\widehat{\phi\phi})$$

を得る。これより，$\widehat{rr}-\widehat{\phi\phi}$ が最大の差で，したがって，式 (i) によって

$$\widehat{rr}-\widehat{\phi\phi}=-2K \qquad \cdots\cdots\cdots(\text{vi})$$

である。

式 (iv) の第一式から $d\widehat{rr}/dr=2K/r$.

となる。

あるいは，積分して

$$\widehat{rr}=-p_1+2K\log(r/R_1) \qquad \cdots\cdots(\text{vii})$$

となる。

したがって，式 (vi) から

$$\left.\begin{aligned}\widehat{\phi\phi}&=-p_1+2K+2K\log(r/R_1),\\ \widehat{zz}&=-p_1+K+2K\log(r/R_1).\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(\text{viii})$$

と導ける。

これらの方程式から，(*a*) 剛平面上の圧力はそれらと接触している材料の表面上に一様に分布していない，(*b*) 子午線引張応力は外側へ行くにしたがって増加し，一般に負の値から正の値へ変わるだろう，ということが分かる。

$r=R$ とすると，$\widehat{rr}=-p$ または

$$p_1=p+2K\log(R/R_1) \qquad \cdots\cdots\cdots(\text{ix})$$

を得る。

もし，加えられた圧力 $p_1$ がこれより小さい値ならば，内面に近い「円環状繊維」は弾性限度，そして孤立した真っ直ぐな繊維に対する凝集限度さえも越える伸びを十分得ることができる。しかし，外面近傍の繊維は弾性のままであるので，破断も目立った変形もないだろう。サン・ブナンはイーストン (Easton) とかアモス (Amos) のよく知られた実験を引用している。本書1474*節参照。

**覚え書**の最後の節５において，サン・ブナンは公式 (ix) についてのトレスカのやや不十分な証明を引用している。

〔262.〕 1015—1017頁の脚注において，サン・ブナンは次の場合を近似的に取り扱っている。すなわち，中空直円筒（半径 $R$, $R_1$）の外面が剛体の外皮でおおわれていると仮定して，内面は厚さ（$R-R_1$）を減少させるが，高さ（$h$）を増加させる大きな圧力を受けるとして，この塑性効果を生じる圧力を決定すること。トレスカは二つの仮定に基づいてこの問題の解を得ていたが，それは全く十分であるとみなすことはできない。塑性の一般方程式は実際あまりにも複雑なので，この場合に対する正確な解について大きな期待を抱くことはできない。サン・ブナンはトレスカの第二の仮定，すなわち円筒の上部底面とそれに平行なすべての平らな断面が平面のままで，また，ブロックの軸に垂直のままであること，および軸に平行な線はそれらの

平行性を保つことだけを受け入れて解を与えている。この仮定が近似的に正しいに過ぎないことは明らかであるが，サン・ブナンの研究は興味のあるものである。それは主引張応力の最大の差が半径方向距離のすべての値について同じ一対で示されない場合の一つを取り扱っているからである。これは $3r^2$ ＜または＞ $R^2$ に応じて解を二つの部分に分け，その各々の場合は $3R_1^2$ ＜または＞ $R^2$ に応じて二つの副の場合に分かれる。サン・ブナンの結果はトレスカの結果と一致しない。

**〔263.〕『同じ軸のまわりに対称である塑性的運動についてレヴィ氏が提出した方程式の一つに加える補足について』**(*Sur un complément à donner à une des équations présentées par M. Lévy pour les mouvements plastiques qui sont symétriques autour d'un même axe.*)，**『報告集』**(*Comptes rendus*)，第 LXXIV 巻，1872年，1083—7頁。

サン・ブナンは軸対称の塑性についてのレヴィの第三式を引用している。この方程式は

$$4\overparen{rz}^2+(\overparen{rr}-\overparen{zz})^2=4K^2$$

である〔本書252節の式 xvi 参照〕。

この方程式は負の引張応力（圧力）の最大と最小のものが考えている点の子午面内にあるとき，塑性運動についての唯一の真の条件である，と彼はいっている。これは常に真ではなく，レヴィの第三の条件は次のもので置き換える必要がある。

$2K$＝次の三つの量の絶対値の最大のもの：

$$\left.\begin{array}{l} 2\sqrt{\overparen{rz}^2+\dfrac{1}{4}(\overparen{rr}-\overparen{zz})^2} \\ \overparen{\phi\phi}-\dfrac{\overparen{rr}+\overparen{zz}}{2}-\sqrt{\overparen{rz}^2+\dfrac{1}{4}(\overparen{rr}-\overparen{zz})^2} \\ \overparen{\phi\phi}-\dfrac{\overparen{rr}+\overparen{zz}}{2}+\sqrt{\overparen{rz}^2+\dfrac{1}{4}(\overparen{rr}-\overparen{zz})^2} \end{array}\right\}.$$

このことは主引張応力について識別する三次方程式が

$$\begin{aligned}&(T-\overparen{xx})(T-\overparen{yy})(T-\overparen{zz})-\overparen{yz}^2(T-\overparen{xx})\\&-\overparen{zx}^2(T-\overparen{yy})-\overparen{xy}^2(T-\overparen{zz})-2\overparen{yz}\,\overparen{zx}\,\overparen{xy}=0\end{aligned}$$

であることを考えると直ちに理解される。そして，これは $\overparen{xx}$, $\overparen{yy}$, $\overparen{zz}$, $\overparen{yz}$, $\overparen{zx}$, $\overparen{xy}$ の代わりにそれぞれ $\overparen{rr}$, $\overparen{\phi\phi}$, $\overparen{zz}$, 0, $\overparen{rz}$, 0 と置くとき，

$$\begin{aligned}&(T-\overparen{\phi\phi})\left(T-\frac{\overparen{rr}+\overparen{zz}}{2}-\sqrt{\overparen{rz}^2+\frac{1}{4}(\overparen{rr}-\overparen{zz})^2}\right)\\&\times\left(T-\frac{\overparen{rr}+\overparen{zz}}{2}+\sqrt{\overparen{rz}^2+\frac{1}{4}(\overparen{rr}-\overparen{zz})^2}\right)=0.\end{aligned}$$

となる。

レヴィは全体を $T-\overparen{\phi\phi}$ で除して，この根を無視したらしい。

〔264.〕 しかし，$\overparen{\phi\phi}$ は，たとえば本書の261節の問題でのように，時には三つの主引張応力の最大のものまたは最小のものである，とサン・ブナンは述べている。というのはその場合には，

$$\overparen{zz}=\frac{\overparen{rr}+\overparen{\phi\phi}}{2}$$

であるから。

本書262節の近似解において，$3r^2<R^2$ のとき，引張応力 $\overparen{\phi\phi}$ もまた最大の差に含まれている。したがって，レヴィの論文はこの方程式に関する限り訂正される必要がある。

脚注において，サン・ブナンは彼の解〔本書261-2節参照〕は実際に**半逆** (*semi-inverse*) 法によって得られることを指摘し，他の塑性問題を解くのに同じ方法を用いてよいこと示唆している。

**〔265.〕『光波の理論を提出する種々の方法について』**(*Sur les diverses manières de présenter la théorie des ondes lumineuses.*)，**『化学と物理学年報』**(*Annales de Chimie et de Physique*)，第4集，第 XXV 巻，1872年，335—381頁。この論文はまた同じ年にゴーシィエ・ヴィラール (Gauthier-Villars) によって単独に公表された。

その内容は本質的に光の波動説の歴史に属する。サン・ブナンはこの分野におけるコーシー (Cauchy)，ブリオ (Briot)，およびサロー (Sarrau) の研究をかなり詳しく考察し，彼らが提出した種々の説の欠陥を指摘している。最後に，彼は一般形の方程式から光の種々の現象を説明するのに必要な条件を満たす特殊な微分方程式を得るブシネスク (Boussinesq) の方法を取り扱っている。サン・ブナンはブシネスクの仮説を激賞して，彼の説は次のようであると考えている。

同時により多くの単純さ，統一性，確からしさを示すもので，また厳密に他の説（常に問題を進歩させた他の論文が優れた才能をもって提出されていようとも）よりも，優先的に教えられる価値があると私は思う〔380—1頁〕。

しかし，ブシネスクの仮説は解析結果を一つの基本公式にまとめたものとして便利ではあるが，分子変位がなぜまたどのようにエーテルの変位とそれらの距離および時間の微分商の関数であるかの理由を理解し，これらの関数の**形**をもっと明確なある物理学的な仮説から導き得るまで，ブシネスクの仮説は十分とは考えられないことを，私は述べなければならない。

§ 1—§ 2は弾性の初期の歴史を取り扱っている。1863年の論文〔本書 146-7 節参照〕のように，サン・ブナンは，グリーンが提出した正確な平行性に対する条件とラーメが複屈折について示唆した条件とは等方性で一致するに過ぎない，と考えている。

ラーメもグリーンも光についての種々の著者の研究について私が行った解析を理解していない。才能ある人々は，同じ問題について，彼らに相応しい多くの他の著作をもつ二人の著名な著者の誤った考えに惑わされないことが肝要である。〔脚注，341頁〕本920*節，1108*節，146節および193節参照。

〔266.〕**『1875年8月2日に提出されたルフォール氏の論文についての報告』**(*Rapport sur un Mémoire de M. Lefort présenté le 2 août 1875.*) この報告はトレスカ (Tresca), リーサル (Resal), およびサン・ブナン〔**報告者**〕によるもので，**『報告集』**，第 LXXXI 巻，1875年，459—464頁に見られるだろう。この報告はその論文をほめているが，論文は，移動荷重が通過する単純はりおよび連続はりの数個の断面において，曲げモーメントを求める問題を取り扱っている。ルフォールの論文を参照しよう。

〔267.〕**『塑性力学の実験的研究に必要な注意について』**(*De la suite qu'il serait nécessaire de donner aux recherches expérimentales de Plastico-dynamique.*), **『報告集』**，第LXXXI巻，1875年，115—122頁。

この覚え書は今までに得られた解の数とまた現存する塑性力学理論の基礎を拡張するために，新しい塑性力学の実験の必要性を述べている。サン・ブナンは，塑性固体を別々の部分に分割して，これらに流体連続性の法則を適用するトレスカの方法の不十分さを指摘している。彼はこの**純運動学的な**方向での自身の研究を述べ，本書 233 節参照，その後，レヴィが補足したように，伸びおよびすべりの抵抗係数が等しいというトレスカの法則に基づいた彼の後期の理論と方程式に言及している。本書236節，245節，および 258 節参照。彼は，この理論を発展させるために，われわれが欲しいのは塑性材料の射出によって得られる形ではなく，**材料内の要素の絶対的な経路である**ことを指摘している。彼は，溶融金属内においた三次元の針金の網によって一連の点を前に印しておいた多数の同様な塑性ブロックに，同じ荷重を同じように，しかし，異なる期間作用させることによって，このことがどのように確かめられるかを示唆している。彼はまた同じ結果を与えるらしい他の方法を書き留めている。覚え書の中で，彼はレヴィ，ブシネスクおよび彼自身の解いた塑性の簡単な場合に言及している。本書255-61節参照。終わりにトレスカからの数行がある。トレスカはサン・ブナンが提唱した実験の重要性を認めているが，彼は着手するまで生きていなかった，と私は思う。

〔268.〕**『熱振動が物体を膨張させうる様式および膨張係数について』**(*Sur la manière dont les vibrations calorifiques peuvent dilater les corps, et sur le coefficient des dilatations.*), **『報告集』**，1876年，第LXXXII巻，33—38頁。

これらは間接的に分子引力の定数を変える場合のそれらの影響よりも，むしろ熱振動によって直接分子間距離に生じる変化によって，熱効果をあらわそうとする試みである。サン・ブナンは二つの分子だけを取り扱い，また一つの分子は固定されていると仮定している。

$r_0$ をつり合いにある分子間距離，$r=r_0+v$ を変位した距離，そして $f(r)$ を分子間作用の法則とすると振動方程式が次のようになることは容易に分かる。

$$m\frac{d^2v}{dt^2}=f(r)=f(r_0+v),$$

$$=vf'(r_0)+\frac{v^2}{2}f''(r_0)+\frac{v^3}{6}f'''(r_0)+\cdots\cdots$$

もし，$v=0$ と $t=0$ に対して $dv/dt=v_0$ ならば，第一近似として

$$v=\frac{\dot{v}_0}{a}\sin at$$

を得る。ここで，

$$f'(r_0)/m=-a^2$$

である。

第二近似については，

$$v=\frac{\dot{v}_0}{a}\sin at+\frac{b^2\dot{v}_0^2}{6a^4r_0}(1-\cos at)^2$$

である。ここで，

$$\frac{r_0f''(r_0)}{m}=b^2$$

である。

$t=0$ から $2\pi/a$ までの $v$ の平均値 $v_m$ を見出そうとすると

$$v_m=\frac{b^2\dot{v}_0^2}{4a^4r_0}$$

を得る。

したがって，熱振動による伸びは

$$=\frac{v_m}{r_0}=\frac{m\dot{v}_0^2}{2}\frac{1}{2r_0}\frac{f''(r_0)}{\{f'(r_0)\}^2}$$

である。

このようにして，伸びは運動エネルギー $mv_0^2/2$ に比例することが分かる。その運動エネルギーは一般に絶対温度の尺度と見なされ，$f''(r_0)$ が正ならば，正であろう。

二つの分子が系で置き換えられるとき，これらの結論はなお成り立つだろう，とサン・ブナンは述べている。したがって，熱効果は**関数** $\boldsymbol{f(r)}$ **の二次の導関数**に依存するだろう。

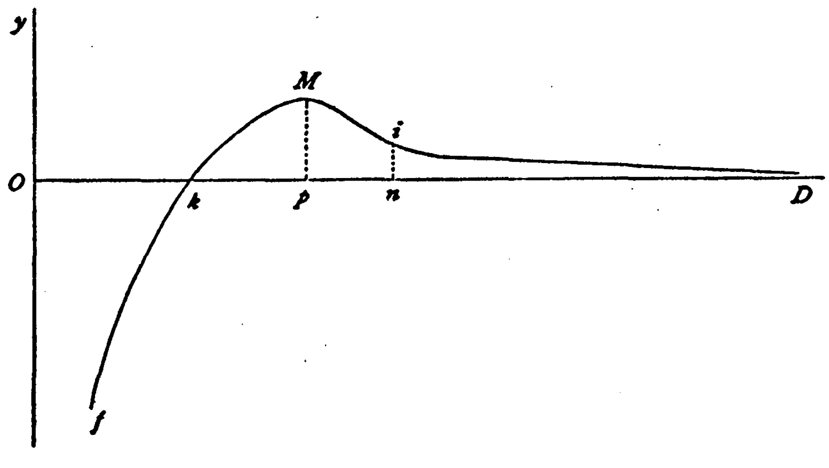
もし，距離に対してプロットした分子間作用の法則を表す曲線に変曲点があれば，ある例外的な物質に起こるように，温度の増加が体積を減少させる場合があるはずである。サン・ブナンは $OD$ を距離の軸，$Oy$ を力の軸として，$y=f(r)$ の曲線の下側の図形の形を示唆している。

ここで，$Ok=r_0$ は作用が反発から引く力に変化する点を示している。もし，$Oy$, $OD$ 軸が漸近線の性質をもつならば，無限小と無限大の距離でそれぞれ十分注目される無限大の力と無限小の力を得る。$pM$ は分力間の最大引力を記録し，これよりも大きな任意の力は，もし持続されたならば，破壊を生ずるだろう。破壊の距離を定義するのは距離 $Op$ に相当する。分子間距離が $Op$ を越えるような速度を分子に与える大きな熱振動は，多分，熱による溶解を示すだろう。点 $i$ は変曲点に相当し，液体状態にある物体の加熱による収縮に相当する。

この議論はあまり決定的ではないとしても，特に少定数との関係において興味がある。本書439*節と977*節参照。

〔269.〕**『物体の原子構成について』**(*Sur la constitution atomique des corps.*)，**『報告集』**，第 LXXXII 巻，1876年，1223—26頁。

この覚え書においてサン・ブナンは，物質に付与され，したがって必然的に伸ばされていると仮定された原子の分割できないことの中に含まれたパラドックスについてのベルスロー (Berthelot) の意見について述べている。彼は1844年の彼の論文〔本書 1613* 節参照〕を引用し，一部は純正哲学的な理由から，一部は物理



学的数学的な理由から，**連続した**伸びは物体にも，またその構成原子にも属さないと考えている，と断言している。ここでまた，われわれに関係する点は，彼が少定数の仮説に言及していることである。

この機会に，私は一つの注意をしておこう。その上，支えるほどの高さに達している著作の中の若干の著者は，英国人であろうとドイツ人であろうと，1821年から1828年までにフランスでナヴィエ (Navier)，コーシー (Cauchy)，ポアッソン (Poisson)，ラーメ (Lamé) およびクラペーロン (Clapeyron) によって発見され確立された固体の弾性公式を，コルク，ゼリー，植物の髄，ゴムのような細胞組織の，または海面状の，または半液体状の弾性物質に拡張しようとし，また同じ伸びについてこれらの公式の係数の数を増し，または各々の係数を互いに独立させる必要があるので，**ボスコヴィッチの理論** (*théorie de Boscovich*) の名のもとに，原子を力の作用の中心に帰する彼の根本的な考えではなく，法則そのもの，すなわち互いに作用を及ぼし合う粒子の相互距離の関数である作用についての一般的な物理学の法則を活発に非難し始めた。このようにして，彼らによれば分子力学または内部の力学の半世紀前の創造者であるナヴィエ，ポアッソンおよび他の学者たちが陥った**大きな誤り**を，彼らは有名な修道士のせいだとしている。ところで，非難されているこの法則，ラプラス (Laplace) などによって用いられ，コリオリ (Coriolis) やポンスレー (Poncelet) によって物理学的力学の基礎として受入れられたこの法則は，ニュートン (Newton) 自身の法則と別のものではない。そのことは彼の偉大で主要な著作だけではなく，彼の依然として不滅の光学の一般的注釈にも見られる通りである。この偉大な法則になされた利用は決して誤りではない。鉄や銅のように，実際に固体である物体について導かれた，またはもっと正確に言えば**決定された**係数をもつ弾性公式は，これらの金属の実験〔『**ナヴィエの講義**』の付録V：本書195節参照〕――これらの実験の中には最近コルニュ (Cornu) 氏に負う非常に決定的なものもある――について十分論議され，かつ解釈された結果に一致する〔1225頁〕。

ボスコヴィッチは原子からその伸びを取り除いたが，ニュートンは分子間の力を中心に向かうとして取り扱ったことは，思い出す価値のある点である。本書26*節参照。

**〔270.〕『固体の各点での内部引張力の最大の接線成分，および破壊面の方向について』** (*Sur la plus grande des composantes tangentielles de tension intérieure en chaque point d'un solide, et sur la direction des faces de ses ruptures.*)，『**報告集**』，1878年，第 LXXXVII 巻，89―92頁。

ポティエ (Potier) は，法線 $r$ が主引張力 $T_1$，$T_2$，$T_3$ の方向と角 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ をなす面を横切る剪断応力 $\widehat{rs}$ について，次の公式を示していた。

$$\begin{aligned}\widehat{rs}=&(T_1-T_2)\cos^2\alpha\cos^2\beta\\&+(T_2-T_3)\cos^2\beta\cos^2\gamma\\&+(T_3-T_1)\cos^2\gamma\cos^2\alpha,\end{aligned}$$

$\widehat{rs}$ の最大値＝1/2〔最大と最小の主引張応力の差〕

次に，彼はこれらの公式を破壊の条件に適用することへ進んだ。これらの結果は1866年にクライツ (Kleitz) が，1870年にレヴィ (Lévy) が，1864年にサン・ブナン自身が示していた，とサン・ブナンは指摘している。彼はまた1847年のホプキンス (Hopkins) を加えていたかも知れない。次いで覚え書は，最大剪断応力方向の破壊がほとんど実験によって確認されておらず，実験はむしろ最大伸びの方向の破壊を指し示していることを指摘している。サン・ブナンは最後に，当時の新しいいくつかの実験の結果を考察しているが，この方向でのなお一層の研究が必要であることを述べている。

**〔271.〕『加熱された物体の膨張および物体が及ぼす圧力について』** (*Sur la dilatation des corps échauffés et sur les pressions qu'ils exercent.*)，『**報告集**』，1878年，第 LXXXVII 巻，713―18頁。

この論文は1876年の論文とともに読むべきである。本書 268 節参照。それは少定数の弾性学者が仮定するような分子間の力の法則によって熱の現象がどのように説明できるかを示している。サン・ブナンによってなされた仮定は，熱の現象の原因である分子の振動が並進振動で，表面振動の性質をもつものではないということである。これは，高度に希薄化されたガスでは，何らの熱振動もないことを示すので，私にはあまりもっともらしいとは思われない。というのは，分子同士がほとんど，または全く影響を及ぼさないとき，なぜ分子が**周期的な**並進振動をするのかの理由がないと思われるからである。

このようなガスの輝線スペクトルは実際にその仮定に矛盾すると思われるし，ガス分子の場合に，熱振動が脈打つものならば，それは多分流体や固体の場合にも同様な性質のものだろう

と思われる。

〔272.〕 サン・ブナンは，彼の初期の論文，すなわち1855年の『**学術振興会**』(*Société Philomathique*) に対してなされた連絡〔本書68節参照〕，と1876年の最初の論文〔本書268節参照〕の若干の記述で，彼の論説を始めている。彼は後者の論文の解析と同様な解析によって，同じ結果：

$$v=\frac{\dot{v}_0}{a}\sin at \qquad \cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

を導いている。それは，もし，これらの方針で熱現象を扱うのであれば，二次の項を考慮に入れなくてはならないことを示している。

〔273.〕 しかし，その上，彼はここで並進振動が分子の系によって周囲の外皮に及ぼす圧力への影響を考え始めている。このことについて，ある程度の考えを得るために，彼は互いの分子から距離 $2r_0$ にある二つの固定した分子の間に置かれた自由分子を仮定している。彼は自由分子の振動に対して方程式

$$m\frac{d^2v}{dt^2}=2vf'(r_0)+\frac{v^3}{3}f'''(r_0)+\cdots\cdots \qquad \cdots(\mathrm{ii})$$

を容易に得ている。

$2f'(r_0)=-ma'^2$ とおき，**三乗のみ**を省略するならば，

$$v=\frac{v_0}{a'}\sin a't$$

が求まる。

別の二つの分子が固定されているので，ここでは膨張の問題はない。どちらかの分子への反作用を見出すために，$f(r_0+v)$ にこの $v$ の値を代入しなければならない。そして，

$$f(r_0+v)=f(r_0)+\frac{f'(r_0)}{a'}\dot{v}_0\sin a't + \frac{f''(r_0)}{2a'^2}\frac{\dot{v}_0^2}{2}2\sin^2 a't+\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots(\mathrm{iii})$$

を得る。

このようにして，振動する要素質量の外皮上での圧力 $p$ の平均値は，

$$=f(r_0)-\frac{f''(r_0)}{4f'(r_0)}\frac{\dot{v}_0^2}{2}m \qquad \cdots\cdots(\mathrm{iv})$$

であろう。

$f'(r_0)$ は明らかに負〔$=-ma'^2/2$〕であるので，これが振動による圧力の増加を意味するためには，$f''(r_0)$ を負と仮定しさえすればよい，とサン・ブナンは述べている。

方程式 (iv) で示されているような圧力の値に言及して，彼は脚注で次のように示唆している。

ここでなされているような説明とともに，作用の二次**導関数** $f''(r)$ を考えに入れたこのような考え方は，これらの内壁に働く圧力を数学的に説明する見解の中で，今日の秀でた学者たちが工夫したかあるいはよみがえらせた多数の繰り返された反射で容器の内壁に向かって気体分子の乱暴な衝突を都合よく置き換えるのが適切ではなかろうか等々？〔717頁〕

〔274.〕 サン・ブナンは，彼の四番目のパラグラフ〔717頁〕の中で，二つか三つの分子について，ここで見出された結果が多数の分子にまで拡張できるかどうかを尋ねている。第一次導関数 $f'(r)$ による二次の新しい項が $f''(r)$ の第二次導関数に**加わる**ことは容易に分かるので，彼はイエスと答えている。この点で，彼は1863年の『**リウヴィユの雑誌**』の中の彼の論文の281頁の脚注〔本書 127 節参照〕と，同じ『**雑誌**』の1873年，305—61頁のブシネスクによる論文に言及している。

それによって，**少定数**仮説に基づいて変位に対する線形項のみによって応力を計算するとき，温度増加による全ての膨張と全ての応力を破棄する，とサン・ブナンは結論している。**事実，全ての熱力学を無効にする。**そこで，彼の理論にしたがえば，熱効果はもっぱら分子間距離の関数として示された分子間作用の第二次導関数によるものである。その点は少定数仮説へのそれの関係で明らかに重要である。分子間反作用の法則 $f(r)$ の定数は温度とともに変化するのか——『分子間反作用の強度』が脈打ち振動のエネルギーとともに変化するならばそうであるように—— $f(r)$ が物体の熱状態の直接の関数でないために，分子の並進運動を生じることで，熱は分子の平均距離にのみ影響するのか？

〔275.〕『**原子の構成について**』(*De la Constitution des Atomes.*). この論文は『**ブリュッセル科学会年報**』(*Annales de la Société scientifique de Bruxelles.*), 第2年，1878年に寄稿された。この雑誌のコピーは英国博物館，王立学会図書館，あるいはケンブリッジ図書館に見出されない。したがって，私がラウル・ド・サン・ブナン氏の親切に負うている抜き刷り

の頁〔**ヘイズ** (*Hayez*), **ブリュッセル** (*Bruxelles*)〕を参照しよう。

抜き刷りは78頁もあり，——かなり歴史的，哲学的，および科学的細目を扱い——物質の連続性やボスコヴィッチの原子理論を扱っている。それは1844年と1876年の論文の中で提出されたサン・ブナンの議論の最後の**要約**と考えてよい。本書1613*節，268節および269節参照[1]。

〔276.〕 弾性学と材料力学の理論の理論的基礎は，結局分子凝縮の法則に求められなければならない。その法則の発見は物理天文学に革命を起こした引力の発見と同じように，われわれの主題に革命を起こすだろう。このことから，弾性学者は原子物理学者に助けを求めることになる。原子物理学者は代わりに弾性と塑性材料の定数についての実験において分子構造理論に示唆に富む多くのことを見出すだろう。このことを心に留めるならば，多くの科学者たちが著者の方法の大部分と多くの結論に不満を示すだろうが，上記の論文の熟読によって有益な多くのことが得られるかも知れない。

論文の範囲を読者に明瞭に提示するために，私は一二の意見とともに私の論考をあらかじめ述べておく。われわれの実際的な物体についての経験を基礎とした運動の法則が，実際的な物体の動力学的性質の基礎を形作るこれらの要素の存在へ実際に適用されるかどうか本格的に議論してよい[2]。しかし，原子へ力学の原理を応用することとなおさらに単純な実体にそれらの原理の源を戻すことからどんな結果が生まれるかを研究するのが最も賢明である。原子がその部分と無関係な運動をもつと信じるようにさせること〔たとえば，小さい圧力で，またあまり高温でないときの元素ガスの輝線スペクトル〕は多くあり，またこれは，一つの原子の他の原子への作用のみならず，原子の幾つかの部分の相互作用へ力学の原理を適用する場合の効果を調べるべきであることを示唆している。もし，多定数が実験的に証明されるならば，(i)分子間作用の法則が**状況**の関数であるか，あるいは(ii)要素Aのも一つの要素Bへの作用が周囲の要素の配列に無関係でないかのいずれかを仮定しなければならない〔**『修正された作用の仮説』**(*Hypothesis of Modified Action*): 本書第Ⅰ巻，814頁<1530節>参照〕。別の可能性があるかも知れないが，最もありそうなものとしては，少なくともこれらが初期の研究に値する。もし，分子間作用の法則が**状況**の関数であるならば，分子間距離が分子の大きさに比例することが分かると期待すべきである。アンペール (Ampère) やベクレル (Becquerel) によれば，前者は後者より非常に大きい。バビネ (Babinet) によれば，それらは少なくとも 1800：1の割合にある〔サン・ブナンの論文の§13 参照〕。これらの事情の下で，状況がどのように影響を及ぼすことができるかを理解することは困難であり，事実上ボスコヴィッチ (Boscovich) の仮定である単なる点あるいは作用中心として，それぞれの分子を扱うことで十分であろう。引き伸ばされた物体として分子を扱っているウイリアム・トムソン郷の比較的最近の研究によれば，固体の二つの隣接する分子間の平均距離は1億分の 1 cm より小さいのに，**気体**分子の直径は5億分の1cmより大きい〔**『自然科学』**(*Natural Philosophy*),第Ⅱ部，502頁〕。したがって，分子間距離は分子の大きさの5倍より小さいだろう。この場合，二つの分子の部分間の作用の法則は同じ分子の部分間の作用の法則と同じでなければならない，ということはどうやらもっともらしい。というのは，5：1のような小さな相対距離において，どのように一分子が重要となり始め，他の分子が重要でなくなるかを理解することは，多分不可能ではないけれども，困難であるから。正または負の引張力に等しい抵抗は，平均分子間距離は分子間作用がその符号を

1) 脚注〔1頁〕において，サン・ブナンはうわさから1844年の論文〔私が**学会**で抄本を見たに過ぎない〕が1852年のベルギーの雑誌**『ル・カトリック』**(*Le Catholique*) に全部出ていたと述べている。

2) たとえば，**『運動の第二法則』**は，反発する物体$A$と$B$が第三の物体$C$の存在に影響されることなくそれの質量に依存するが，原子の「見掛けの質量」がそれの内部振動速度の関数であること，これらがそれ自身周囲の原子の配列に依存していることが考えられる〔**『ケンブリッジ哲学会報』**(*Camb. Phil. Trans.*)，第XIV巻，110頁の論文の51節と52節参照〕。

変える距離とあまり異なるはずがないことを示している。さらに，分子自身が振動しあるいはその部分の相対運動を受ける能力は，分子の部分間の作用における符号のなお一層の変化を示すに違いない。すなわち，この作用が確かに分子間作用であるならば，物質の基本的部分が伸びをもっているという仮定に基づいて，実際に非常に限られた範囲内でそれの符号を**三たび**変えることができる相互作用の法則を前提とせざるを得ない。このような一つの法則に対する解析方程式を発見することは，困難ではないかも知れないが，このような式の元となるある機械的系を考えることは，多分困難であろう。他方，ボスコヴィッチによれば，作用中心の一因子として『状況』を考えることは多分不可能である。輝線ガススペクトルが必要とすると思われるような振動の源として，後者の中心を想像することは容易ではない。他方，このような振動は伸ばされた物質分子の自由振動として容易に説明される。しかし，もし周囲の要素によって修正された作用の仮説に戻るならば，正にトムソンの実質的に広げられた分子に対してだけではなく，なぜそれをボスコヴィッチの中心へ適用すべきでないのか理由がないと思われる。ボスコヴィッチの理論の本質的な性質は作用の究極の源の伸長しないことであり，分子間作用が個々の分子の距離だけの関数であるという仮定ではない。そのとき，少定数はボスコヴィッチの教義の基本的な部分の不可欠のものではないし，若干の筆者が仮定しているように，二つのものはともに一致していない。したがって，この論文中の原子の構成に関するサン・ブナンの仮定は本来ボスコヴィッチのものであるが，しかし，彼は次のように書いている。

> われわれが証明する仮定は，非常に近い二つの粒子の間のそれぞれの作用の強さが一般的に単に本来の相互の距離だけではなく，その上ある程度までは周囲の粒子にいたる距離やそれらの間の後者の距離でさえも関数であることを導く〔17頁，§7〕。

多定数へ導く修正された作用のこの仮説[1]は，論文のいたるところでサン・ブナンが前提としているが，彼が述べているように彼はそれと意見が一致していない。それは実際にこの論文と1844年の論文の間の本質的な相違をなしている。彼の§7，18頁参照。

〔277.〕 伸長することのない究極の原子を支持するサン・ブナンの議論には次の三重の特徴がある。

（i） 原子の既知の物理学的性質からの議論
（ii） 純正哲学的議論
（iii） 神学的議論

次の三つの節で，これらに関する若干の点について簡単に述べよう。

〔278.〕 §3～§21はよく知られた原子の性質を基にしたさらに純粋科学的議論を取り扱っている。§3において，ナヴィエとポアッソンの間の論争に特定の関係をもつ弾性学からの議論がある。本書527*節から534*節参照。サン・ブナンは物質の連続性が原子の総和を定積分で置き換える可能性にどのように関係しているかを指摘している。彼は，連続の仮定に基づいて，1828年と1829年のポアッソンの論文および1827年のコーシーの論文の結果に実際に含まれている次のような陳述を，12—15頁の脚注の中ですばらしい明瞭さで証明している。〔本書443*節，548*節と616*節と比較しながら，特に『**エコール・ポリテクニク雑誌**』(*Journal de l'École polytechnique*)，1831年，52頁，と『**数学演習**』(*Exercices de mathématiques*)，1828年，321頁を参照〕：

1°. 固体内の要素面を横切る応力は静止流体のそれと同様に剪断成分をもたないだろう。

1) 『**修正された作用の仮説**』は前節の第2の脚注で述べたものに近い結果へ導き，それはサン・ブナンが17頁の次のような文章で示している。

> 一つの粒子に働く**全体**の力は，現在まで信じられているように，各々の粒子がただ一つ存在していたとき，その他の粒子を別々に引き付けているすべての力の既知の平行四辺形あるいは多角形の静力学法則で組み立てられた幾何学的な合力に正確に等しくないこともまた導くことに気付くだろう。この法則は感知できる距離での作用に対してしか正しくない。距離の二乗の逆数であるその強さは万有引力の作用であり，弾性，毛細管現象，衝突，圧力，そして振動を生じる。感知できないほどの距離での作用に比べれば，常に無視できる。そして，これらの後者と強い作用とはわれわれが述べる静力学法則からのがれる。

2°. 任意の点における引張応力は密度の二乗に比例して変わる。

3°. 初期応力がなかったならば，ひずみの状態は応力を生じないだろう。

したがって，**少定数仮説では**，とてもありえない物理学的な結果に到達する。すなわち，物質は連続であり得ないということになる。これはもし連続であるならば，すべり振動を伝えることができないエーテルへもまた適用される。少定数の仮説を明らかに含んでいない同じ陳述の基本的な証明が§9と§10に与えられている。

次に続く§11〜§17は物質の究極の要素の伸長に反対すると同様に，連続性に反対する種々の議論が含まれている。それらは確かに決定的ではないが，それらは極めて示唆に富んでおり，特に私が184—5頁に示しておいた伸長の仮説に基づいて作用の法則のせいにしなければならない符号の急激な変化の困難さに関して暗示的である。§18〜§21は，ボスコヴィッチの仮説に基づいて，種々な現象——たとえば，結晶化や慣性——の説明を考えている。ところで一方，36—7頁の脚注は作用の法則についてのありそうな形やその若干の結果を扱っている。本書268節と273節参照。

〔279.〕 §22〜§39は，サン・ブナンが純正哲学的異論と名付けているものを取り扱っている。それは彼の理論を伝えた人々がとなえた唯一の異論であると彼は言っている。サン・ブナンの取り扱い方法への若干の光明は9頁の彼の意見から得ることができる。

その上とりわけ，私を純正哲学的状況よりずっと遠くに置くことを強いられる場合に，間違いであることを述べ，また，危険であるかも知れないことを非難し指摘することができるすべての権威ある人に述べることを前もってゆだねる。

それはわれわれの分野を越えて提議された純正哲学的議論，すなわちこれらの節によって証明された哲学上の学識の非常に広い範囲の討論を始めることである[1]。サン・ブナンがスコラ的著者に対して明確な好みを示し，また，たとえば，次のような55頁の算術的パラドックスのような後期スコラ的へりくつをまねる傾向を時折示す，と言うに留めておかなければならない。

したがって，創造者の秘密に従わずに，次のことを述べることができる……彼は感知しうる物体も物質の無数の点の最後の部分も形作らなかったと。

〔280.〕 純正哲学的問題解決の手掛かりはここでは場違いであろうが，それに至るまでの神学的議論の考察は，それらが科学雑誌の中にあっても場違いであるので，私は思い切って考えることにする。凝集力の真の原因を決めることを切望する人々は，もしそれが観察の事実とよく一致するのであれば，彼らはボスコヴィッチの系を容認し徹底的に理解するならば，

現代と古代の二つの主要でその上一層有害な哲学的錯誤である汎神論と唯物論〔74頁〕

から彼らを保護するであろうという主張によって，伸長した物質原子の原則を採用することを妨げられないだろう。

にもかかわらず，多くの読者は論文の後の部分の方法あるいは結論のいずれかを是認できないでいることに気付くだろうが，弾性の物理学に関して提出している興味ある問題に対しては間違いなく全部読まれるであろう。

〔281.〕**『固体の弾性パラメータとそれらの実験的決定について』**(*Des paramètres d'élasticité des solides et de leur détermination expérimentale.*),**『報告集』**(*Comptes rendus*), 第LXXXVI巻，1878年，781—5頁。

これは弾性的に対称な三つの面をもつ物体の場合の種々の弾性係数と弾性率の間に保たれる関係およびそれらの値を求める実験的方法についてのよい要約である。

〔282.〕 (1) 応力—ひずみ関係は本書の117節($a$)のものだろう。係数は今全部で九つある。すなわち，三つの直伸び係数，$a$, $b$, $c$, 三つの

1) 37—9頁には物質の不可分性に関する〔**大変な思想家**〕(*du terrible penseur*) カント (Kant) の二律背反についてのよい批評がある。

直すべり係数，$d$, $e$, $f$, および三つの横伸び係数，$d'$, $e'$, $f'$ である。次の特別な場合がある。

(2) $x$軸に垂直な平面内の弾性等方性：

$$e=f,\ e'=f',\ b=c=2d+d'.$$

サン・ブナンは条件を間違って述べており，**九つ**の定数を $a$, $b$, $d$, $e$, $d'$, $e'$, の**六つ**へ減少すると言っているが，$d'$ は $b$ と $d$ の項で知られており，すなわち**五つ**へ減る。

(3) 完全な弾性等方性，すなわちサン・ブナンが説明しているように，二つの軸方向平面における等方性：

$$a=b=c=2d+d'=2e+e'=2f+f' \text{ と } d=e=f.$$

これは九つの係数を**二つ**に減少する。すなわち，$d'=\lambda$ の膨張係数と $d=\mu$ のすべり率。サン・ブナンは $d=e=f$ の関係を述べるのを忘れている。

(4) コルクあるいは**ゼリー**であるとかさらにゴムであるような固体と液体の細胞組織の混合物のような層状に形成されたスポンジ状の物体の目につく程度の変形へ公式の適用を広げようとしないで〔これはどんな有用性もない〕，**真の**固体に限るならば，また二つの分子間の相互作用のそれぞれが**単なる距離**，すなわち互いに力を及ぼしあう二つの分子の距離**の関数であり**，$\widehat{xx}\cdots\cdots\widehat{xy}$ が応力成分の総和であると仮定するならば，〔ラーメが1852年に反対した**一つの点の回りの積分**を使うことなしに〕$d'=d$, $e=e'$, $f=f'$ を得ることを非常に容易に証明することができる。

このことは場合(1)，(2)と(3)において，それぞれ係数を六つ，三つ，および一つへ減少する〔782頁〕。

サン・ブナンは第二の場合に**四つ**であると言っているが，これは誤りである。

これらの少定数条件に関して，論文は次のように続けている。

そして，これらの等式を認めることができる。というのは，これらの原理がほとんど分かり切ったことであることの外に，実際に等方性をもつすべての物体におけるパラメータの一致〔$\lambda=\mu$ あるいは $d'=d$〕は多数の事実によって立証されているからである。中でも，最近のものは1869年のコルニュ(Cornu) 氏の巧みな実験によって成し遂げられている〔782頁〕。

サン・ブナンは脚注において，『**哲学雑誌**』(*Philosophical Magazine*)，1878年1月号，18頁の中でW. トムソン郷が引用した実験を述べている。この科学者に当てられた本書の章を参照されたい。そこで銅について示された一致しない結果は，採用された実験方法での過失かあるいは多種類のそれぞれの試料における異方性——**恐らくそれらの内のいくつかは $E_x$ が $E_y$ や $E_z$ よりずっと大きいように冷間加工された**——かのいずれかを立証していると，彼は考えている。

鉛ガラスと鉄の結果は少定数の値に十分近いと彼は考えているが，ところが，コルクとゴムの結果はどちらの状態をも立証していないので，捨ててもよい。

伸び率へもどると容易に次のことが分かる。

(5) 場合(2)，$E_x=a-2\eta_{xy}e'$,

そして $\eta_{xy}=\eta_{xz}=\dfrac{1}{2}\dfrac{e'}{d+d'}$：

(6) 場合(3)，$E_x=2d(1+\eta_{xy})$,

$$\eta_{xy}=\eta_{xz}=\frac{1}{2}\frac{d'}{d+d'}：$$

(7) 場合(4)，

$$E_x=\frac{5}{2}d\ \left(=\frac{5}{2}\mu\right),$$

$$\eta_{xy}=\eta_{xz}\ (=\eta)=\frac{1}{4}.$$

(8) 引き抜き金属あるいは圧延金属，層になった石，木などのような**無定形**材料，すなわち規則正しい結晶のない物体について，それらの異方性は三方向に等しくない初期応力によるかまたは繊維構造によるとみなすことができ，$E_x$, $E_y$, $E_z$ がそれら自身の中で3/2を越える比をもたないかあるいは高だか2であるならば，次の形の三つの関係が実際上成立するだろう。

$$a=\frac{(2e+e')(2f+f')}{2d+d'}\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

これは弾性のだ円体分布である。本書138節と142節参照。

少定数等方性の場合に，金属に対して一般に認容される関係

$$a=\frac{3ef}{d},\ b=\frac{3fd}{e},\ c=\frac{3de}{f}\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

を得る。

(9) $E_x$ と $E_y$ との比〔$x$軸が繊維の意味をもつ〕が10，20，40またはより以上に達すること

ができる木について，上の関係の二つだけを取ることができる。

$$b=\frac{3fd}{e},\quad c=\frac{3de}{f} \qquad \cdots\cdots(\mathrm{i})$$

それは次の関係を示す。

$$E_x=a-\frac{ef}{2d},\quad E_y=\frac{fd}{e}\,\frac{8ad-4ef}{3ad-ef},\quad E_z=\frac{e^2}{f^2}E_y \qquad \cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

$$\eta_{xy}=\frac{1}{4}\,\frac{e}{d},\quad \eta_{xz}=\frac{1}{4}\,\frac{f}{d}.$$

木に関して，(8)と(9)の陳述の修正について：本書308節，312節および313節参照。