弾性学と材料力学の歴史
(Ⅱ-11)

アイザック　トドハンター著
カール　ピアソン編著
(訳)　村上一男[1)]　並川宏彦[2)]　村上一實[3)]

〔283.〕 さて，サン・ブナンは次のような率や係数の値に到達する場合の実験方法を示すことへと進んでいる。

(1) 三つの直すべり係数，あるいはすべり率 d, e, f を求めること。

場合(a). x 軸に垂直な平面内で等方性があるとき〔$e=f$〕。直円柱のねじりについて実験する。

場合(b). e が f に等しくないとき，長方形底面の柱体のねじりに対する29節〔47節と表**I**で修正された〕の公式を用いる。底面が $2b'\times 2c'$ であり，b' は c' よりはるかに大きいとすると，

$$M_x=\frac{16\alpha}{l}f\frac{b'c'^3}{3},\ \text{実際上。}$$

もし，c' が b' よりはるかに大きいならば，

$$M_x=\frac{16\alpha}{l}e\frac{b'^3c'}{3},\ \text{実際上。}$$

ここで，α はねじりの**全角度**〔$=l\tau$〕である。これらは e, f の値を与え，また軸が y および z に平行である柱体での同様の実験は，d, f と d, e を与え，前の結果を照合する。

(2) 三つの直伸び係数 a, b, c を求めること。

(i) d, e, f がわかり次第，それらは前節の場合(4)，(7)および(8)の方程式(ii)で与えられる。

(ii) 場合(9)において，b と c はわかるが，a は純引張り実験あるいはよりすぐれて曲げ実験によって，E_x の値が得られ次第，方程式(ii)すなわち $a=E_x+\dfrac{ef}{2d}$ から与えられるだろう。次には E_y と E_z の値がわかるだろう。

〔284.〕 サン・ブナンの最後の言葉から，次のことを引用することができる〔785頁〕。

なお，実験者が，η_{xy}, η_{xz} を測るために，また横に切断された小さい柱体の伸びや**曲げ**によって，E_y, E_z, η_{yz}, η_{yx}, η_{zx}, η_{zy}, をさえ測るために，十分鋭敏な観察方法をもっているならば，方程式〔すなわち，九つの係数をもつ方程式，307節参照〕を右辺の三項式に変化させ，これらの左辺を二つずつ零にすることによって，これらの数々の量から引き出すことができる $a, b, c, d, \cdots\cdots f'$ の式は，行われた測定とさらにすべての人々によって認められていない〔282節の〕(4)，(8)，(9)の仮定をも検定する方法をもたらすだろう。これはコルニュ氏の1869年の主要な実験が成し遂げているこの最新式の検定法である……〔下記の彼の論文についてのわれわれの議論参照〕。

膨張，曲げおよびねじりの静的測定しか付け加える必要はない。ヴェルトハイム氏やシュバンディエ氏が行ったと同様に，必要な場合には，縦，横およびねじり振動によってもたらされた音の観察で置き換えることができるだろう。

サン・ブナンは，このようにして得た弾性係数の動的な値が静的な値とは多分異なるだろうということを言い足すのを忘れている。本書1301*節(3)と1404*節参照。

〔285.〕『直線と曲線からなる底面をもつ柱体のねじりについて，そして，ラーメの等温円筒系の対数座標のある使用法を示しうる特異性について』(*Sur la torsion des prismes à base mixtiligne, et sur une singularité que peuvent offrir certains emplois de la coordonnée logarithmique du système cylindrique isotherme de Lamé.*)，『**報告書**』(*Comptes rendus*)，第LXXXVII巻，1878年，849—54頁と893—9頁。抜き刷りには追加がある。この論文は12月2日および9日に読会にかけられた。

1) 立命館大学理工学部　名誉教授　2) 本学文学部　3) 大阪産業大学短期大学部

ねじりについての論文〔本書36節の４番と５番参照〕に示された解法が引用された後，その目的が§２〔850—1頁〕に説明されている。

クレーブシュは，ラーメの直交等温曲線座標〔すなわち，**共役関数**〕を用いることによって，輪部のなお一層大きい変化が得られることを1862年に示した。また，トムソン氏とテイト氏は彼らの立派な著書である1867年の『**自然哲学教程**』(*A Treatise on Natural Philosophy*）で，直線で囲まれた長方形に関する(3)｛本書36節の(1)｝のような解を，円弧あるいは２つの同心円弧とそれらを区切る２つの半径で構成されているような直線と曲線からなる長方形の輪部へ広げるために，それらの用法を展開することなしに示した。「これは理論上極めて興味があり，実用的な力学では実際に有用」と彼らは述べている。

これらの断面の種類に関する解が，あらかじめある補助の未知数を幾何学上の未知数 u で置き換えることなく，普通の極座標 r, ϕ, を使い続けて単純で直接に得ることができた，と私には思えた。

〔**286.**〕 §３において，サン・ブナンは円筒座標で必要な解を得ている。その基礎方程式〔本書17節，方程式(vi)参照〕は

$$\left.\begin{array}{r} u_{rr}+u_r/r+u_{\phi\phi}/r^2=0 \\ \tau r dr+u_\phi dr/r-ru_r d\phi=0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots(\text{i})$$

となる。

γ が環状扇形の角度で，r_0 と r_1〔$>r_0$〕がその半径であるならば，第２方程式，すなわち表面方程式はその中央線が初めの線として取られるときに，次の条件になる。

$$\left.\begin{array}{l} \phi=\pm\gamma/2 \text{ のとき，} r>r_0>r_1 \text{ の値に対して，} \\ \qquad \tau r^2=-u_\phi \\ \pm\gamma/2 \text{ の間の } \phi \text{ のすべての値に対して，} \\ \quad r=r_0 \text{ あるいは } r_1 \text{ のとき，} u_r=0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots(\text{ii})$$

これらの条件は u の次のような値によって満たされることがわかる。

$$u=-\frac{\tau r^2}{2}\frac{\sin 2\phi}{\cos\gamma}-\frac{2\tau}{\pi}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$
$$\times\sum_0^\infty\frac{(r_1^{m+2}-r_0^{m+2})r^m-(r_0r_1)^{m+2}(r_1^{m-2}-r_0^{m-2})r^{-m}}{r_1^{2m}-r_0^{2m}}$$
$$\times\frac{\sin m\phi}{1-m^2/4}$$

ここで，

$$m=\frac{2n+1}{\gamma}\pi$$

この結果は u が形式

$$Cr^2\sin 2\phi+\sum(Ar^m+A'r^{-m})\sin m\phi$$

であると仮定し，表面条件(ii)で定数を決定することによって実際に得られる。

〔**287.**〕 論文の次の節§４において，サン・ブナンは共役関数

$$\beta=\tan^{-1}(z/y),\quad \alpha=\log\sqrt{\frac{z^2+y^2}{a^2}}$$

の助けによって，同じ問題を正しく処理している。

彼は——方程式 $V_z=u_y$, $V_y=-u_z$ によって u に関係した——関数 V について α, β の項で二つの解を得ている。

その最初のものは二つの無限和を含んでおり，その性質はラーメが曲線座標に関する彼の著作の『**第11課の講義**』(*Onzième Leçon*)〔彼の本の184頁参照〕の中で与えた解に似ている。第二はトムソンとテイトの解である。〔彼らの論文の第２版，第２部，§707，252頁参照〕。

しかし，V から得た関数 u の値は，$r_0=0$ のとき事実上明らかであるにもかかわらず，V の値は**不確定**になる，と彼は述べている(§5)。事実，V の級数は**収束**しなくなり，少なくとも $r_0=0$ の場合には，何ら意味をもたなくなった V の式によって u の値に達したのである。このようにして，この場合には本書の **286** 節に示した手順で決定した u の値に後戻りさせられる。この点については本書の **291** 節において考察した1879年１月の論文の143頁の脚注を参照。

〔**288.**〕 §６において，サン・ブナンはねじりモーメント M とすべりの値を解析的に表わしている。そして，次の節ではこれらの公式でなされた数値計算の結果を与えている。

ねじりモーメント M に対して下記のものを引用してよい。

(1) 完全な扇形：

$\gamma=$	45°	60°	90°	120°	180°	270°	300°	360°
$\dfrac{M}{\mathfrak{M}}$	0.0923	0.1333	0.2096	0.2754	0.3776	0.4486	0.5253	0.5589
$\dfrac{M}{\mathfrak{M}'}$	0.5921	0.7036	0.7499	0.7023	0.5902	0.4876	0.5429	0.5589

ここで，$\mathfrak{M}=\mu\tau\times\dfrac{r_1^2\gamma}{2}\times\dfrac{r_1^2}{2}$，すなわち古いクーロンの理論における扇形の**中心**についてのね

じりモーメント；$\mathfrak{M}'=\mathfrak{M}\times\left(1-\frac{16}{9}\frac{1-\cos\gamma}{\gamma^2}\right)$＝古いクーロンの理論における扇形の重心についてのねじりモーメント。よく知られているように〔本書181節(*d*)参照〕，サン・ブナンの理論は，**両方のねじりモーメントは等しい**とする。この種の物体に対して，古い理論の結果は実際問題として大変誤っており，非常に危険であることが直ちにわかるだろう。割れた断面に対するねじり抵抗の減少は，$\gamma=360°$ に対して $M/\mathfrak{M}=0.5589$ という結果で十分に表わされる。

(2)　$r_1=2r_0$ のときの環状の扇形：

$\gamma=$	60°	120°	180°
$\frac{M}{\mathfrak{M}}$	0.0800	0.1068	0.1160
$\frac{M}{\mathfrak{M}'}$	0.6812	0.3160	0.1909

古い理論が用いられるとき，誤差はとても大きいことが再びわかる。

〔289.〕 §§9-10において，サン・ブナンはすべりが零である完全な扇形の $\gamma=60°$ と $\gamma=120°$の各点を決定している。これらの点は中心からの距離においてほんのわずかな量だけ重心からの距離と異なっている。次いで，彼は同じ二つの扇形の種々の点に対して変位 u の値を示している。

最大の u の値は円弧と二つの直線の側面との交点にある。中線 $\phi=0$ は不変で，弧の要素は断面の最初の面の上で，この円弧の中央にある距離とともに増大する傾きをとる。

〔290.〕 §11において，サン・ブナンは同じ二つの扇形に対する最大のすべりの値と位置を述べている。すなわち，彼は破損点〔**危険点**(*points dangereux*)〕を求めている。どちらの場合も，最高点は外形上にあるが，最高点の最大値は直線で囲まれた側面にある。

$\gamma=60°$ に対して，破損点は中心から $0.5622r_1$ の距離にあり，$\sigma=0.4900\tau r_1$ である。

$\gamma=120°$ に対して，破損点は中心から$0.3671r_1$ の距離にあり，$\sigma=0.6525\tau r_1$ である。

脚注において，サン・ブナンは，$\gamma>\pi$ に対して，すべりは中心〔すなわち $r=0$ のとき〕で無限になる，というトムソンとテイトの意見〔彼らの本の§710参照〕を引用している。これは，必ずしも破壊を暗示しておらず，ひずみが数理弾性学の方程式を適用できるものよりも大きいことを意味しているだけである。しかしながら，それは実際問題として凹角を丸くすることの得策を示唆している。

〔291.〕 **『ねじりモーメントの近似公式について』**(*Sur une formule donnant approximativement le moment de torsion*)，**『報告集』**，第LXXXVIII巻，142—7頁，1879年。この覚え書は1879年1月27日に読会にかけられた。

この論文はかなり実用的価値がある。それはサン・ブナンのすべてのねじりの結果を狭い範囲内に包含する**実験式**を与えている。ただ凹角をもつ完全な扇形のみを除外している。

だ円断面に対する公式〔本書18節参照〕

$$M=\frac{\pi b^3c^3}{b^2+c^2}\mu\tau$$

ではじめて，それを

$$M=\kappa\frac{\alpha^4}{I_0}\mu\tau$$

と書くことができる。ここで，I_0 は**重心**を通る断面に垂直な軸のまわりの横断面の慣性モーメントで，α は面積である。量 κ は

$$\kappa=\frac{1}{4\pi^2}=0.025330=\frac{1}{39.48}$$

である。

さて，サン・ブナンは，彼が種々の論文で取り扱っている主な断面に対して，κ はわずかに0.0228から0.026まで変化するが，その平均値は $0.025=1/40$ に非常に近いことを見出している。

したがって，すべての断面に対して，きわめて近似的に公式

$$M=\frac{1}{40}\frac{\alpha^4}{I_0}\mu\tau$$

を得る。

ねじりモーメントは慣性モーメントに**反比例して**変化し，古い理論のように比例して変化し

ないことが注目されるだろう。サン・ブナンは以下のことを追加している。

そのことを熟慮すると，そのことは一般にそうであるに違いないことがわかる。なぜならば，平らな表面に伸ばされた断面は最大の極慣性モーメントをもつ断面で，ねじりがこの曲がり，このゆがみの最大のものを生じるものでもある。このゆがみは，とりわけ中心から最も離れた点でそれらの要素への法線上で繊維が生じた傾きを減少させ，したがって，展開された弾性の反力が最も小さい全モーメント M をもつ断面である〔142頁〕。

論文の最後の節である§3〔143—7頁〕は，軸が二重曲率の曲線である棒の弾性についての幾つかの一般的な観察で占められている。ねじりについての先の公式に対するそれらのただ一つの関係は，若干の著者らによって用いられたねじり抵抗の係数，すなわち $\mu\tau I_0$ が $\frac{1}{40}\mu\tau\alpha^4/I_0$ で置き換えられなければならないという意見である。サン・ブナンは1843年の自分の論文〔本書1584*節参照〕をブレス (Bresse) とリーサル (Resal) のごく最近の研究と比較している。下記のそれらの論文の議論を参照。それには注目すべき重要なものは何もない。145頁の脚注は削除されるべきである。

〔292.〕 **『リールの理学部教授ブジネスク氏の著作に関して，1880年にサン・ブナン氏によって行われた簡潔な解析』**(*Analyse succincte des travaux de M. Boussinesq, professeur à la Faculté des sciences de Lille, faite par M. de Saint-Venant, 1880.*)。この報告書は**石版刷り**23頁からなる。

1880年4月に，ブジネスクは科学上の著作の情報を印刷し，アカデミーの会員へ贈呈していた〔4°の中で，ダーネル，リール〕。そのとき，サン・ブナンは上記の解析を作成し，アカデミーの会員にブジネスクを熱心に推薦した。12—17頁（§§6—9）は弾性学への彼の寄与を述べている〔**「固体とその弾性に関するブジネスク氏の著作はやはり独創的で重要である」**(*'Les travaux de M. Boussinesq sur les corps solides et leur élasticité ne sont pas moins originaux et importants'*)〕。17—20頁は彼の色々な力学的で哲学的な論文を扱っており，20—23頁は光の波動説への彼の寄与を扱っている。ブジネスクの論文を論じるとき，われわれはサン・ブナンの小論に立ち戻る機会があろう。

〔293.〕 同時代の人の弾性の研究を扱っているサン・ブナンの別の論文はここで注目してよい。それは**『アンリ・トレスカの主な著作の理論的目的について』**(*Sur le but théorique des principaux travaux de Henri Tresca*) と題され，**『報告集』**，第CI巻，1885年，119—22頁にある。

トレスカの研究の理論への影響と塑性の科学の起源が概説されている。著者は理論の鋭い認識をトレスカに帰している。彼は多くの人が誤って信じているような単なる経験主義者ではなかった。

科学的な真理の重要性と同様にトレスカの論文の有用性のために，空想しか示さない軽率さまたは科学を狭量的に嫌うために，しばしば誤解され，度々非難されようとも，トレスカはより優れた才人で，真の科学の人であり，したがって，理論という言葉を最も良く，かつ最も正しく受けいれる**理論家**であったことを示すことは重要である〔119頁〕。

〔294.〕 運動幾何学：—**『弾性的，塑性的，流動的であるにせよ，物体の変形の運動幾何学について』** (Géometrie cinématique : -*Sur celle des déformations des corps soit élastiques, soit plastiques, soit fluides*),**『報告集』**(*Comptes rendus*), 1880年，第XC巻，53—56頁。

サン・ブナンは**純粋運動学**の重要性に注意を引き，力や応力の考えの助けなしに物理学上の問題で，どこまで進歩することが可能であるかに注目している。サン・ブナンはすべての動力学の運動学への還元，すなわち物理学から力の概念を除外することの先駆者の一人として正当に見なすことができる。それは今では恐らく単なる時間の問題に過ぎない。1851年に示された石版刷りの連続講義〔ヴェルサイユにおいて工学系学生に述べられた**『運動学に基づく力学の原理』**(*Principes de Mécanique fondés sur la*

Cinématique)〕において，彼は運動学の原理に基づいて力学の大部分を扱っていた。この方面において，彼はグラスマン（Grassmann）に先行され，リーサル（Resal）が彼に続いた〔『純粋運動学』(*Cinématique pure*)，1862年と『一般力学』(*Mécanique générale*)，1873年〕。この論文は，応力の概念なしに，ひずみすなわち変位の幾何学において，どれほど進歩できるかを指摘している。サン・ブナンは球のゆがみの理論をだ円に引用し，あたかもそれが小さなひずみに対してのみ正しかったかのように述べている。それがすべてのひずみに対して正しいということはティソー（Tissot）〔『報告集』の同じ巻の209頁，補足の『覚え書』(*Note*) 参照〕によって指摘された。彼はそれについての証明を『数学年報』(*Nouvelles Annales de Mathématiques*)，1878年，152頁に示していた。サン・ブナンは，1864年の彼自身の証明〔『学士院』(*L'Institut*)，1614号，389頁〕がこの制限を実際には持ち込まなかったことを，この『覚え書』の中で指摘している。さらに，ひずみの運動学はトムソンとテイトが1867年に彼らの『自然哲学教程』(*Treatise on Natural Philosophy*) の中で98—124頁に徹底的に考察していた。

〔295.〕 **『衝突を受けない端末が固定された，異なる材質または異なる大きさの弾性棒に対する自由弾性棒の縦方向衝撃について；衝撃棒が非常に硬く，非常に短い極端な場合の考察』**(*Du Choc longitudinal d'une barre élastique libre contre une barre élastique d'autre matière ou d'autre grosseur, fixée au bout non heurté; considération du cas extême où la barre heurtante est très raide et très courte.*)，『報告集』，第XCV巻，1882年，359—365頁，正誤表，422頁。

これは論文の単なる摘要である。それは一つの棒が一端固定された別の棒を縦方向に打つ場合について三角級数で解を与えている。

Vは推進棒の初期の一様速度，a_2はその長さ，a_1は固定した棒の長さ，P_2，P_1は二つの棒の重さ，xを固定された棒の端末から二つの棒の共通軸に沿って測定された横座標とすると，衝撃中の任意の点xでの各々の棒の変位u_2とu_1は次のようである。

$$u_2=P_2V\sum\frac{2\cos\{m\tau_2(a_1+a_2-x)/a_2\}\sin mt}{m\cos m\tau_2\left(\dfrac{P_1}{\sin^2 m\tau_1}+\dfrac{P_2}{\cos^2 m\tau_2}\right)}$$

$$u_1=P_2V\sum\frac{2\sin\{m\tau_1 x/a_1\}\sin mt}{m\sin m\tau_1\left(\dfrac{P_1}{\sin^2 m\tau_1}+\dfrac{P_2}{\cos^2 m\tau_2}\right)}$$

ここで，mは方程式

$$\frac{P_1}{\tau_1}\cot m\tau_1-\frac{P_2}{\tau_2}\tan m\tau_2=0$$

の根であり，$\tau_1=a_1/k_1$，$\tau_2=a_2/k_2$である。k_1とk_2は二つの棒内の音速である。

〔296.〕 次に，サン・ブナンはτ_2がτ_1に比べて非常に小さい場合を考察し，そこで，自由端を重りで打った棒の振動に対するナヴィエとポンスレの式を推論している。本書273*節と991*節参照。サン・ブナンは棒が分離する時間と仕方の問題に立ち入っていない。彼は，二つの自由な棒の場合に，結果は有限項で表すことができ，一つの自由な棒で，重りが一定速度で動き，一端においてそれを縦方向に打つ場合もまた同様であると述べている。一端固定棒で他端を動く重りで打つ場合，彼はこの論文の中で有限項で解くことは試みていない。しかしながら，彼は『報告集』の同じ巻の423—427頁の以下のように題された論文において，これを解くことに取りかかった。

〔297.〕 **『衝突を受けない端末が固定された弾性棒の任意の物体による縦方向衝撃の問題の有限で単純な項での解』**(*Solution, en termes finis et simples, du problème du choc longitudinal, par un corps quelconque, d'une barre élastique fixée à son extrémité non heurtée.*)

この解は本書341節において言及したブシネスクによる問題の完全な扱いと非常に似ている。しかし，それは分離の瞬間を決定していないし，したがって，問題を完全に解いていない。サン

・ブナンは，ブジネスクが彼の解を与えた後，フラマン（Flamant）の助力で，衝撃の全持続期間に対する棒と推進荷重の連続的な状態の図式的研究で，問題全体の結末を付けている。本書 401—7 節参照。