〔共同研究：ことばと論理（Ⅱ）〕

Heiberg版ユークリッド『原論』第X巻最終定理（付録27）の証明構造について

山　川　偉　也*

はじめに

「ギリシア演繹数学の起源――A．サボーのギリシア演繹数学＝エレア起原説をめぐる若干の問題点」（日本科学史学会『科学史研究』第Ⅱ期第18巻 No. 129, 1984年，岩波書店として発表され，後に拙著『ギリシア人の哲学と世界観』玉川大学出版部，1986年に上記標題で収録）なる拙論文において，わたしは，ギリシア演繹数学に関するハンガリーの数学史家のアルパッド・サボーの一連の主張に批判を加えた。その批判の一つの焦点は，ユークリッド『原論』第X巻最終定理についてのサボーによる評価に関連するものであった。

サボーは，直観的・経験的であったギリシア数学が反－図解的・反－経験的で端的な思惟の世界へと移行した時点（すなわちサボーによれば，エレア学派の証明方法に定位した時点）の最古のメルクマールとしてこの最終定理に言及し，「この証明は，もはや具象性（Anschaulichkeit）や経験論とのかかわり合いを一切もっていない。なるほどここでの問題は，直観に対してきわめて思い浮かべやすい二つの量（正方形の一辺と対角線）が，実は共通尺度を全く持っていないという事実を証明しようということだが，その証明の中では，経験に基づくいかなる試みも，またこの事実についての具体的な≪証示≫(Zeigen) も，すべて放棄されている。この証明はただ理論的方法のみを用いて進められているのであり，≪視察可能性≫とか≪触覚可能性≫とかに訴えるのでなく，ただ思考のみに訴えるのである」と強調するとともに，この定理がエレア学派の影響を示すものとして，ギリシア数学史の連続性を両断するものであると断定したのであった。この断定に対しわたしは，前掲論文において批判を加え，問題の証明が，サボーの主張にもかかわらず完全に図解的であって，きわめて起原の古いことが分かっているピュタゴラスの定理が自明視されるなら，直観的明証性をすらもつものであり，「具象性や経験論とのかかわり合いを一切もっていない」どころか，さらにまた「具体的な≪図示≫も，すべて放棄されている」どころか，まったく固有ピュタゴラス派的な意味で具象的であり図示的である，と主張した。

その主張は未だに有効である，とわたしは信ずる。が，当該論文では充分に展開しえなかったことが一つある。それは，問題の最終定理テクスト本文が，ユークリッドか誰かの手によって何の改作も施されずに『原論』に編入されたものではないことのわたしによる指摘（具体的には，その証明が『原論』第Ⅰ巻命題47，第Ⅶ巻命題33，第Ⅸ巻命題23，第Ⅶ巻命題22，第Ⅶ巻定義2，第Ⅶ巻定義12を前提していることの指摘――前掲拙著『ギリシア人の哲学と世界観』188ページを参照）を，『原論』のテクストそのものに即した分析により補強するという作業である。これをわたしは，当該論文を著した時点においてはなしえなかった。いま改めて，これを行なっておきたい。

本研究は，したがって，直接的には前掲拙論文の補説という性格をもつものであり，そのようなものとして提示される。が，わたし自身は，これをエレア学派に関する一連のわたしの研究につながるものである，と意識しているのである。

*本学文学部

Heiberg 版ユークリッド『原論』第X巻最終定理原文対照訳

以下に，まず，Heiberg 版ユークリッド『原論』第X巻最終定理原文とこれの拙訳を対照させる。原文テクストは，Bibliotheca scriptorvm Graecorvm et romanorvm Tevbneriana の1冊として刊行された

Evclidis Elementa Vol. III Liber cvm Appendice, Post I, L. Heiberg, edidit E. S. Stamatis, 1972

である。原文を左欄に，訳文を右欄に掲げる。

Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει.

正方形において，対角線がその一辺と長さにおいて通約不能であることがわれわれの証明すべきことであるとしよう。

Ἔστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΑ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει.

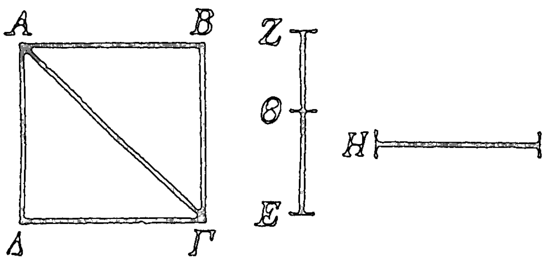
ΑΒΓΔ を正方形であるとし，*ΑΓ* をその対角線であるとせよ。わたしは，*ΓΑ* が *ΑΒ* と長さにおいて通約不能である，と言う。

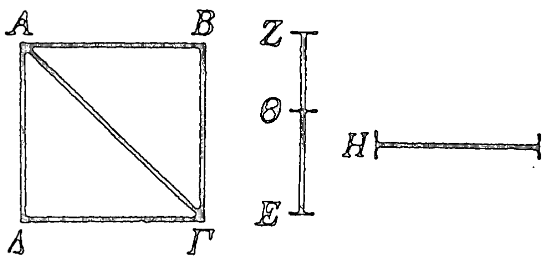
Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω σύμμετρος· λέγω, ὅτι συμβήσεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περισσόν.

何故なら，もし可能なら，通約可能だとしてみよ。その場合には，同じ数が偶数かつ奇数であるという結果になるであろう，とわたしは言う。

φανερὸν μὲν οὖν, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ, ἡ ΓΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

さて，*ΑΓ* からなる正方形が *ΑΒ* からなる正方形の2倍であることは明らかである。そして，*ΓΑ* は *ΑΒ* と通約可能であるから，*ΓΑ* は *ΑΒ* に対し，数が数に対する比をもつ。





ἐχέτω, ὃν ὁ ΕΖ πρὸς Η, καὶ ἔστωσαν οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μονὰς ἐστὶν ὁ ΕΖ. εἰ γὰρ ἔσται μονὰς ὁ ΕΖ, ἔχει δὲ λόγον πρὸς τὸν Η, ὃν ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΖ τοῦ Η ἀριθμοῦ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ ΕΖ· ἀριθμὸς ἄρα.

EZ が *H* に対する比がそれであるとし，*EZ* と *H* の比は，同じ比をもつもののなかで最小だとせよ。すると，*EZ* は単位（1）ではない。何故なら，もし *EZ* が単位で，*ΑΓ* が *ΑΒ* に対してもつ比を *H* に対してもち，*ΑΓ* が *ΑΒ* より大だとすると，*EZ* もまた，数 *H* より大だということになる。これはまさに不合理である。したがって，*EZ* は単位ではない。だから数である。

καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓA πρὸς τὴν AB, οὕτως ὁ EZ πρὸς τὸν H, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AB, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ EZ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ H.

そして，EZ は H に対して，ΓA が AB に対してあるごとくにあるのだから，EZ からなる正方形は H からなる正方形に対して，ΓA からなる正方形が AB からなる正方形に対するごとくである。

διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓA τοῦ ἀπὸ τῆς AB· διπλασίων ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ EZ τοῦ ἀπὸ τοῦ H· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ EZ· ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ EZ ἄρτιός ἐστιν.

ところで，ΓA からなる正方形は AB からなる正方形の 2 倍である。だから，EZ からなる正方形も H からなる正方形の 2 倍である。したがって，EZ からなる正方形は偶数である。こうして，EZ そのものも偶数である。

εἰ γὰρ ἦν περισσός, καὶ ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος περισσὸς ἦν, ἐπειδήπερ, ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ, ὁ ὅλος περισσός ἐστιν· ὁ EZ ἄρα ἄρτιός ἐστιν.

何故ならば，もしそれが奇数だったとすると，それからなる正方形もまた奇数だったはずだからである。というのも，どれだけの奇数が加え合わされようと，加え合わせの数が奇数である場合には，その全体も奇数だからである。したがって，EZ は偶数である。

τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Θ. καὶ ἐπεὶ οἱ EZ, H ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων [αὐτοῖς], πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ὁ EZ ἄρτιος· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ H.

Θ においてこれが 2 等分されたとせよ。すると，EZ と H は，同じ比をもつものどものうち最小のものであるのだから，それらは互いに素である。EZ も偶数だということである。したがって，H は奇数である。

εἰ γὰρ ἦν ἄρτιος, τοὺς EZ, H δυὰς ἐμέτρει· πᾶς γὰρ ἄρτιος ἔχει μέρος ἥμισυ· πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄρτιός ἐστιν ὁ H· περισσὸς ἄρα.

何故ならば，もしそれが偶数だったとすると，EZ と H の双方を 2 が割り切ることになっただろうからだ。すべて偶数は半分の部分をもつからだ。ところが，それらは互いに素である。これはまさに不可能なことである。したがって H は偶数ではない。だから奇数である。

καὶ ἐπεὶ διπλάσιος ὁ EZ τοῦ $E\Theta$, τετραπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ EZ τοῦ ἀπὸ $E\Theta$. διπλάσιος δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ EZ τοῦ ἀπὸ τοῦ H· διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ H τοῦ ἀπὸ $E\Theta$· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ H. ἄρτιος ἄρα διὰ τὰ εἰρημένα ὁ H· ἀλλὰ καὶ περισσός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρός ἡ ΓA τῇ AB μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

そして，EZ は Θ の 2 倍であるから，EZ からなる正方形は，$E\Theta$ からなる正方形の 4 倍である。ところが，EZ からなる正方形は H からなる正方形の 2 倍である。したがって，H からなる正方形は $E\Theta$ からなる正方形の 2 倍である。それゆえに，上で言われた理由により，H は偶数である。しかしそれは，奇数でもある。これはまさに不可能なことである。ゆえに，ΓA は AB と長さにおいて通約可能でない。これがまさに，証明されるべきことであった。

『原論』第Ⅹ巻最終定理の証明構造の分析

テクストの逐語訳に即して，以下に第Ⅹ巻最終定理の証明構造を分析する。そこで明らかになるのは，その証明が（ピュタゴラスの定理ならびに第Ⅹ巻命題5，6を除けば）大枠において，第Ⅶ巻諸定義ならびに第Ⅸ巻における偶数奇数編に密着したものになっているということである。訳文を右に掲げ，その分析を左欄に掲げる。

〔テクスト訳文〕	〔分　　析〕
正方形において，対角線がその一辺の長さにおいて通約不能であることがわれわれの証明すべきことであるとしよう。	証明されるべき命題P：「正方形における対角線と辺は長さにおいて通約不能である」の提示。

〔 1 〕

$AB\Gamma\Delta$ を正方形であるとし，$A\Gamma$ をその対角線であるとせよ。わたしは，ΓA が AB と長さにおいて通約不能である，と言う。	Pの主張。

〔 2 〕

何故なら，もし可能なら，通約可能だとしてみよ。 その場合には，同じ数が偶数かつ奇数であるという結果になるであろう，とわたしは言う。	¬Pを仮定する。 その場合には，同じ数Xが偶数かつ奇数であるという矛盾した帰結が得られる。 (¬P→矛盾)→P の宣言。 〔間接証明の手続きに則って証明を行なうことの宣言〕

〔 3 〕

さて，$A\Gamma$ からなる正方形が AB からなる正方形の2倍であることは明らかである。 そして，ΓA は AB と通約可能であるから，ΓA は AB に対し，数が数に対する比をもつ。	『原論』第Ⅰ巻命題47［ピュタゴラスの定理］を前提。 $A\Gamma^2=2AB^2$ 仮定より，ΓA は AB と通約可能。その場合， $\Gamma A:AB=$数：数 の関係にある（第Ⅹ巻命題5，6．第Ⅶ巻命題33を参照)。そしてこのことは (1) ΓA が AB と通約可能であることは，ΓA と AB が数：数の関係で表現されうる， ということである。そしてそのことはその対偶命題 (2) ΓA と AB が数：数の関係にないならば，ΓA と AB は通約可能でない， ということである。

〔 4 〕

EZ が H に対する比がそれであるとし，EZ と H の比は，同じ比をもつもののなかで最小だとせよ。

$A\Gamma : AB = EZ : H$ である EZ と H を考え，$EZ : H$ が同じ比をもつもののなかで最小のものだと仮定する。

この仮定は，$EZ : H$ が互いに素であり，それらを共通に割り切るものとしては単位しかないことを言う。第Ⅶ巻定義13に「互いに素である数とは共通の尺度としての単位（$=1$）によってのみ割り切られる数である」，とある。

〔 5 〕

すると，EZ は単位（1）ではない。

何故なら，もし EZ が単位で，$A\Gamma$ が AB に対してもつ比を H に対してもち，$A\Gamma$ が AB より大だとすると，EZ もまた，数 H より大だということになる。これはまさに不合理である。したがって，EZ は単位ではない。だから，数である。

ここで，EZ が単位ではないことが証明される。そして，その証明もまた間接証明になっている。すなわち，

$$EZ=1$$

を仮定した場合，その仮定が矛盾に導かれることを証明する。その証明は次のようである。

(1) $EZ : H = A\Gamma : AB$（仮定により）

(2) $A\Gamma > AB$（仮定により）

(3) $EZ > H$（(1)(2)により）

(4) H は数である（仮定により）

(5) 1は数ではない（第Ⅶ巻定義2により）

(6) 数は1より大である（第Ⅶ巻定義2により）

((5)(6)は第Ⅶ巻定義2「数とは単位（$=1$）から成る多である。」による。)

(7) $H > 1$（(4)(6)により）

(8) $EZ > H$（(3)により）

(9) $EZ=1$（仮定により）

(10) $1 > H > 1$（(7)(8)(9)により）

(11) $1 > 1$（(10)より）

(11)は矛盾である。したがって EZ は単位でない。したがって，数である。

〔 6 〕

そして，EZ は H に対して，ΓA が AB に対してあるごとくにあるのだから，EZ からなる正方形は H からなる正方形に対して，ΓA からなる正方形が AB からなる正方形に対するごとくある。

(1) $EZ : H = A\Gamma : AB$

(2) ゆえに $EZ^2 : H^2 = A\Gamma^2 : AB^2$

ところで，ΓA からなる正方形は AB からな

(3) $\Gamma A^2 = 2AB^2$

る正方形の2倍である。だから，EZ からなる正方形も H からなる正方形の2倍である。したがって，EZ からなる正方形は偶数である。こうして，EZ そのものも偶数である。

(4) ゆえに $EZ^2=2H^2$
(5) ゆえに EZ^2 は偶数（第Ⅶ巻定義6「偶数とは2等分される数」により）
(6) ゆえに EZ そのものも偶数である。

〔 7 〕

何故ならば，もしそれが奇数だったとすると，それからなる正方形もまた奇数だったはずだからである。というのも，どれだけの奇数が加え合わされようと，加え合わせの数が奇数である場合には，その全体も奇数だからである。したがって，EZ は偶数である。

EZ が偶数であることの間接証明
(1) EZ が奇数であると仮定する。
(2) EZ^2 は平方数かつ偶数である。
(3) 平方数とは等しい数に等しい数をかけたもの，すなわち二つの等しい数の積である（第Ⅶ巻定義19）
(4) EZ が奇数だとすると，EZ^2 は奇数の奇数倍となる（(2)(3)により）
(5) しかるに，奇数の奇数倍は奇数である（第Ⅸ巻命題23，第Ⅶ巻定義11）。
(6) EZ^2 は偶数である（(2)により）。
(7) EZ^2 は奇数の奇数倍ではない。
(8) EZ^2 は偶数の偶数倍である（(2)により）。
(9) 偶数の偶数倍は偶数である（第Ⅸ巻命題21，第Ⅶ巻定義8）。
(10) ゆえに，EZ は偶数である。

〔 8 〕

Θ においてこれが2等分されたとせよ。
すると，EZ と H は，同じ比をもつものどものうち最小のものであるのだから，それらは互いに素である。そして EZ は偶数である。したがって，H は奇数である。

EZ の2等分点を Θ とする。
仮定により，$EZ:H$ は同じ比をもつもののうち最小であり，したがって
(1) EZ と H は互いに素である(第Ⅶ巻定義13)。
(2) EZ は偶数である（7の(10)において証明済み）
(3) ゆえに H は奇数である。

〔 9 〕

何故ならば，もしそれが偶数だったとすると，EZ と H の双方を2が割り切ることになっただろうからだ。すべて偶数は半分の部分をもつからだ。ところが，それらは互いに素である。これはまさに不可能なことである。したがって H は偶数ではない。だから奇数である。

H が奇数であることの証明。
(1) H が偶数であるとすると，EZ も H もともに偶数であることになる。
(2) 偶数とは2等分される数である（第Ⅶ巻定義6）
(3) その場合，EZ と H はともに2によって割り切られる。
(4) 共通な尺度としてなんらかの数によって割

り切られる数は互いに合成的な数である。それらは互いに素ではない（第Ⅶ巻定義15）。

(5) このことは EZ と H が互いに素であるという仮定に反する。

(6) したがって，H が偶数であることはできない。

(7) ゆえに，H は奇数である。

〔 10 〕

そして，EZ は $E\Theta$ の2倍であるから，EZ からなる正方形は，$E\Theta$ からなる正方形の4倍である。

ところが，EZ からなる正方形は H からなる正方形の2倍である。したがって，H からなる正方形は $E\Theta$ からなる正方形の2倍である。

それゆえに，上で言われた理由により，H は偶数である。

H が偶数でもあることの証明。

(1) $EZ=2E\Theta$

(2) ゆえに，$EZ^2=(2E\Theta)^2=4E\Theta^2$

(3) $EZ^2=2H^2$

(4) $2H^2=4E\Theta^2$（(2)(3)により）

(5) ゆえに $H^2=2E\Theta^2$

(6) H^2 は偶数である（(5)により。第Ⅶ巻定義6）。

(7) H^2 は偶数の偶数倍である（第Ⅸ巻命題21，第Ⅶ巻定義8）

(8) ゆえに H は偶数である。

〔 11 〕

しかしそれは，奇数でもある。これはまさに不可能なことである。

ゆえに，ΓA は AB と長さにおいて通約可能でない。これがまさに，証明されるべきことであった。

したがって，ΓA と AB は長さにおいて通約可能でない。

(1) H は奇数かつ偶数である。（9の(7)と10の(8)により）

(2) 同じ数が奇数かつ偶数であることは不可能である。

この帰結は ΓA が AB と長さにおいて通約可能であるという仮定から導かれた。ゆえに，その仮定は却下される。

こうして，¬Pが否定され，Pが主張される。

上の対照が明らかにしているように，この証明は11段階から成っている。以下のとおりである。

1. 「正方形の対角線と辺の長さにおいて通約不能である」という証明されるべき命題Pの宣言
2. ¬Pの仮定。そして，¬Pの仮定から「同じ数が偶数かつ奇数」という矛盾した帰結が導かれることが¬Pが否定される根拠になるとの主張。
3. 正方形 $AB\Gamma\Delta$ において，その対角線 $A\Gamma$ の平方（$A\Gamma$ を1辺とする正方形）が1辺 AB の平方（AB を1辺とする正方形）の2倍に等しいことを前提し，Pを仮定したことにより $\Gamma A : AB$ が数：数の関係になることを確認。第Ⅹ巻命題5，6を前提。
4. $A\Gamma : AB$ と同じ比をもつもののうち，最小のもの $EZ : H$ の存在を仮定する。この仮定は，EZ と H が互いに素であることを言うものである。すなわち EZ と H は互い

に素であるから，それらを割り切る共通の尺度としては単位（=1）以外には存在しない。

5. EZ が単位でないことの証明。その証明は仮定から得られるところの

　① $EZ>H$

ならびに，『原論』第Ⅱ巻定義2

　② 数とは単位から成る多である

以外のものを前提していない。ただし，当該定義は

　③ 1は数ではない

ならびに

　④ 数は1より大である

ことを根本前提としている。

6. ピュタゴラスの定理ならびに $EZ:H=A\Gamma:AB$ なる仮定により

　① $EZ^2=2H^2$

を導き，

　② 偶数は2等分される（第Ⅶ巻定義6）

ことを前提に

　③ EZ^2 が偶数である

ことを導く。

7. EZ^2 が偶数であることから

　① EZ も偶数である

ことを証明する。その証明が依拠する前提は

　② 平方数とは2つの等しい数の積である（第Ⅶ巻定義19）

　③ 奇数の奇数倍は奇数である（第Ⅸ巻命題23，第Ⅶ巻定義11）

　④ 偶数の偶数倍は偶数である（第Ⅸ巻命題21，第Ⅶ巻定義8）

8. EZ を2等分する点 Θ の導入。そして，EZ と H が互いに素であることの再確認。

9. H が奇数であることの証明。その証明は，7において証明されたところの

　① EZ は偶数である

　② 仮定より EZ と H は互いに素である

　③ 共通尺度としてなんらかの数によって割り切られる数は互いに合成的であって，素ではない（第Ⅶ巻定義15）

を前提に，H を偶数とすると不合理な帰結が生ずることを示すことによって行なわれる。

10. H が偶数であることの証明。その証明は，8において導入された点 Θ が EZ を2等分し，したがって，

　① $EZ=2E\Theta$

であることを前提に，

　② $EZ^2=(2E\Theta)^2=4E\Theta$

で，かつ

　③ $EZ^2=2H^2$

であることから，

　④ $2H^2=4E\Theta^2$

したがって，

　⑤ $H^2=2E\Theta^2$

　⑥ H^2 は偶数

ゆえに H も偶数であることを示すことによって行なわれる。

11. こうして，9における H が奇数であることの証明と10における H が偶数であることの証明を合わせて，

　(1) H は奇数かつ偶数である

という帰結が示され，

　(2) 同じ数 H が奇数かつ偶数であることは不可能である

ことを言うことによって，

　(3) ¬Pが否定され

　(4) Pが主張される。

細かく見ればこのとおりである。しかし，この証明の要点は，つまるところ，

(1) $A\Gamma:AB=EZ:H$

(2) EZ と H は互いに素な関係にある。

(3) $EZ=2E\Theta$

(4) $EZ>H>E\Theta$

(5) $EZ^2=2H^2$

(6) $H^2=2E\Theta^2$

を前提して，

(7) H は正方形 EZ^2 の1辺であるとともに，正方形 $E\Theta^2$ の対角線でもある

ことを，偶数奇数論との関連にもたらし，

(8) H は EZ^2 の1辺としては奇数であり，それと同時に，$E\Theta^2$ の対角線としては偶数で

ある

ことを明らかにすることによって，

(9) 同じ数が偶数かつ奇数であることはできない

ことを根拠に，

(10) 元の正方形 $AB\Gamma\Delta$ の対角線 $A\Gamma$ とその1辺 AB が長さにおいて通約不能である

ことを示すところにある。

『原論』第X巻最終定理の具象的・図示的性格について

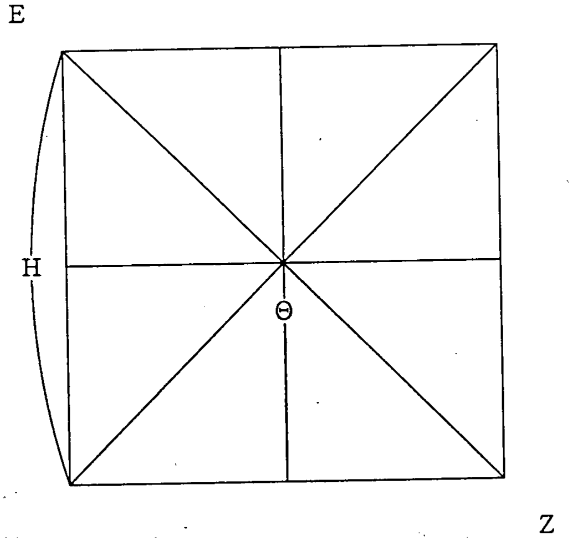
以上の分析を踏まえると，この最終定理が，サボーの言に反して，「もはや具象性（Anschaulichkeit）や経験論とのかかわり合いを一切もっていない……その証明の中では，経験に基づくいかなる試みも，またこの事実についての具体的な≪証示≫(Zeigen) も，すべて放棄されている」どころか，その本来的な意味において具象的であり図示的であることは明らかだと思われる。

何故ならば，この最終定理証明のエッセンスは，その文脈に密着したかたちで下図のように再構成することができるからである。

さて，下の図解は，わたしが拙論文「ギリシア演繹数学の起原――A．サボーのギリシア演繹数学＝エレア起原説をめぐる若干の問題点」において描いたものと本質的に同じものである。そのとき，わたしはこう述べた。「この証明は完全に図解的であって，きわめて起原の古いことが分かっているピュタゴラスの定理が自明視されるなら，直観的明証性をすらもつものであるということができるであろう」，と。

ピュタゴラスの定理を知っている者には，$EZ^2=2H^2$ かつ $H^2=2E\Theta^2$ は図を描くや否やすぐさま納得されることである。EZ と H が互いに通約不能であることを言うためになおも必要なことは，きわめて起原の古いことが分かっている偶数奇数論に関する基本的常識のみである。そして偶数奇数論にかかわるそうした基本的常識を，紀元前500年頃アクメーにあったエピカルモスはたしかに知っていた。したがって，この最終定理の起原は，おそらく前6世紀の終わり頃まで遡り，当然，パルメニデスやゼノンの活動期以前に遡るものとみなされてよいのである。そして，偶数奇数論が正当に初期ピュタゴラス学派の数学者たちに帰せられるかぎりにお

図において，(1) $EZ^2=2H^2$，ゆえに EZ^2 は偶数，したがって EZ は偶数。
(2) EZ と H は互いに素である。したがって，H は奇数。
(3) $H^2=2E\Theta^2$，ゆえに H^2 は偶数，したがって H は偶数。
(4) (2)(3)により，H は奇数かつ偶数。これは不合理である。



いて，この定理もまた，パルメニデス以前のピュタゴラス学派の数学者たちに帰せられてよい，とわたしは信ずる。

最終定理の諸前提ならびに当該定理の別証明について

実際，その証明がきわめてアルカイックなものであることを推測させる若干の証拠がある。まず第一に，すでに見たように，この定理において使用されている諸前提はすべて，前5世紀の前半を遡るものであるとみなされてよい証拠がある。

念のためにいま一度，それらの諸前提を列挙しておくと次のとおりである。

1. 同じ数が偶数かつ奇数であるということはありえない(Arist., *Metaph.*, 986a17–19に，最古のピュタゴラス学派の考えとして彼らは数を偶と奇に分けたと報告されている)。
2. ピュタゴラスの定理（『原論』第Ⅰ巻命題47）
3. 互いに通約可能な2つの量は数対数の関係にある（第Ⅹ巻命題5，6，第Ⅶ巻命題33)。
4. 2つの量が数対数の関係にないならば，それらは通約可能でない（3の対偶命題)。
5. 同じ比をもつもののうち最小のものは互いに素な関係にある（第Ⅶ巻定義13，命題22)。
6. 数とは，単位から成る多である（第Ⅶ巻定義2)［アリストテレスが報告するところによると，ピュタゴラス学派の人々は数を定義して，「1によって測られる多」(*πλῆθος ἑνὶ μετρητόν Met.*, 1057 a 3)とした。ピュタゴラスの徒たちにとっては，1そのものは数ではなく，数が，したがってまた全世界がそれから成るところの単位だったわけである］。
   (1) 1は数ではない。
   (2) 数は1より大である［数は≪多≫であるから］。
   (3) 「単位ではない」=「数である」
7. 偶数とは2等分される数である（第Ⅶ巻定義6)。
8. 平方数とは等しい数に等しい数をかけたもの，すなわち二つの等しい数の積である（第Ⅶ巻定義19)。
9. 奇数の奇数倍は偶数である（第Ⅸ巻命題23，第Ⅶ巻定義11)。
10. 偶数の偶数倍は偶数である（第Ⅸ巻命題21，第Ⅶ巻定義8)。
11. 共通な尺度としてなんらかの数によって割り切られる数は互いに合成的な数である。それらは互いに素ではない（第Ⅶ巻定義15)。

これらの諸前提は，O．ベッカーがピュタゴラス学派の「小石」(*ψῆφοι*) を用いてする図形数の形成の慣行に関連づけて明らかにしたところの (O. Becker, *Das mathematische Denken der Antike,* S. 103)，第Ⅸ巻における偶数・奇数に関わる小理論体系に深い関わりあいをもつものばかりである。ベッカー自身は，この第Ⅸ巻命題21-36にみられる偶数奇数論成立の時期を，前5世紀の中頃ないしは前半に比定したのであったが，これに対しアルパッド・サボーは，正当に，その理論は第Ⅶ巻定義6―9（定義6：「偶数とは2等分される数である」，定義7：「奇数とは2等分されない数，または偶数と単位だけ異なる数である」，定義8：「偶数倍の偶数とは偶数で割られて商が偶数になる数である」，定義9：「偶数倍の奇数とは偶数で割られて商が奇数になる数である」）ならびに定義12)「素数とは単位によってのみ割り切れる数である」）なしには考えられないことを指摘し，さらに，偶数・奇数の区別についても，「数」そのものへのなんらかの考慮なしにはありえないことに注目して，第Ⅶ巻定義2における数の定義が偶数奇数論に先行するものであることを主張した（『ギリシア数学の始原』中村幸四郎・中村清・村田全　訳，玉川大学出版部　1978年，311–317ページ参照)。この主張は，おそらく正しいであろう。しかしその正しい主張は，パルメニデス

に関する誤った年代設定のゆえに，エレア学派の≪一≫についての教説の影響下に成ったものであるという主張と合体せしめられた。しかし，エピカルモスが偶数奇数論をすでに知っており，パルメニデスがエピカルモスよりもかなり年少であったとすれば，パルメニデスが偶数奇数論形成の前提となる一についての教説によってピュタゴラス学派の数論に影響を与えたということはありえないこととなる。したがって，第Ⅶ巻における「単位」ならびに「数」の定義は，パルメニデスに先行するピュタゴラス学派の数学者たちのオリジナルな考えに由来するものだと考えなければなるまい。

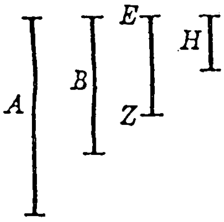
ところで，この最終定理がきわめて起原の古いものであることは，上に述べたこと以外に，別の理由を挙げることができる。その理由とは，わたしが取り上げたテクストとは別に，この最終定理の別証明を与えるテクストがあって，そのなかに，「単位」が「数」ではないことに関連するきわめてアルカイックな見解の吐露がみられるからである。

Heiberg 版ユークリッド第 X 巻は，付録として，問題の最終定理のすぐ後に，次のようなテクストを掲げている。

Ἄλλως

[Δεικτέον καὶ ἑτέρως, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος τῇ πλευρᾷ.]

Ἔστω ἀντὶ μὲν διαμέτρου ἡ Α, ἀντὶ δὲ τῆς πλευρᾶς ἡ Β· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω [σύμμετρος· καὶ γεγονέτω] πάλιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ ΕΖ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Η, καὶ ἔστωσαν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων



αὐτοῖς οἱ ΕΖ, Η· οἱ ΕΖ, Η ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. λέγω πρῶτον, ὅτι ὁ Η οὐκ ἔστι μονάς. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μονάς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η. διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α τοῦ ἀπὸ τῆς Β· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η. καί ἐστι μονὰς ὁ Η· δυὰς ἄρα ὁ ἀπὸ ΕΖ τετράγωνος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ Η· ἀριθμὸς ἄρα. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Α, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Η πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ, μετρεῖ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ἀπὸ τῆς Α, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ Η τετράγωνος τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ αὐτὴ ὁ Η τὸν ΕΖ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν ὁ Η· ὁ Η ἄρα τοὺς ΕΖ, Η μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

直訳すると，これは次のようになる。

別証明

〔正方形の対角線とその辺が通約不能であることが，別の仕方でも証明されなければならない。〕

対角線Aに対するに，辺Bがあるとせよ。わたしは，AとBが長さにおいて通約不能である，と言う。何故なら，もしできるなら通約可能だとし，ふたたび，AがBに対するようにEZがHに対してあり，EZとHは，それらと同じ比をもつものどものうち最小だとせよ。すると，EZとHは互いに素である。まずわたしは，Hは単位ではない，と言う。何故なら，もし可能なら，単位だとしてみよ。すると，AがBに対するようにEZはHに対してあるのだから，EZからなる正方形はHからなる正方形に対して，Aからなる正方形がBからなる正方形に対するようにあることになる。ところで，Aからなる正方形はBからなる正方形の2倍である。だから，EZからなる正方形もHからなる正方形の2倍である。そして，Hは単位である。したがって，EZからなる正方形は2である。これはまさに不可能なことである。したがって，Hは単位ではない。したがって数である。そして，Aからなる正方形がBからなる正方形に対するように，EZからなる正方形はHからなる正方形に対してあり，逆に，Bからなる正方形がAからなる正方形に対するように，Hからなる正方形はEZからなる正方形に対してあるのだから，Bからなる正方形はAからなる正方形を割り切り，したがってHからなる正方形もEZからなる正方形を割り切る。その結果辺HそのものがEZを割り切ることになる。しかるに，Hは自分自身をも割り切る。したがってHが，互いに素な関係にあるEZとHを割り切ることになる。これはまさに不可能なことである。したがって，AとBは長さにおいて通約可能ではない。したがって通約不能である。これがまさに証明さるべきことであった。

この証明の要点は，互いに素である〔したがって，単位以外にはそれらを割り切るものがない〕と仮定されたEZとHにあって，HがH自身とEZの双方を割り切ることになる矛盾を指摘することによって，元の仮定「対角線Aと辺Bが互いに長さにおいて通約可能である」を却下することにある。

しかし，わたしが注目したいと思うのはそのことではなく，EZと素な関係にあるHが「単位ではない」とする証明である。その証明にあって驚くべきことは，Hを単位と仮定するとき（ピュタゴラスの定理により）EZ^2が2になるが，「これはまさに不可能なことである」（*ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον*）と言われていることである。この言葉は，古代ギリシア人とは異なる数概念，つまり1を数として意識しているわれわれには，一瞬奇異なものとして受け取られる。われわれにとっては，1辺が1の正方形の対角線が$\sqrt{2}$であることはあまりにも自明であるので，$\sqrt{2}$を1辺とする正方形の面積が2であることは不可能でも何でもなく，かえって自明の真理である。

ところが，この別証明を与えたとにとってはそうではなかったのである。第一に，この証明を行なった人物にとっては，1はそもそも数ではなかった。だから，通約可能だと仮定されたEZとHは，通約可能であるということが数対数の関係を意味するかぎり，Hが1であることはそもそも不可能なことだったのである。そればかりではない。Hが単位だとして対角線対辺の関係にあるEZとHにピュタゴラスの定理を適用すると，$EZ^2=2H^2$であるから，$EZ^2=2$であるという結論が不可避となる。が，2は平方数では全然ない！「平方数」とは，第Ⅶ巻定義19によれば，「等しい数に等しい数をかけあわせたもの」あるいは「2つの等しい数によって囲まれた数」（*ὁ ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος*）である。ところが，2はこの定義にまったく合致しない。2を囲む等しい数（≠単位）などは存在しない。この定義に合致する最小の平方数は4である！　だからこそ，この別証明を与えた人にとっては，1辺が1の

正方形の対角線上に立つ正方形を考えることはまったくの不可能事に属したのである。

このことの考慮は，必然的に次の結論を導く。すなわち，多くの識者がこれまで説いてきたように，ギリシア最古の無理量の発見がなされたのは1辺が1の正方形における辺と対角線の関係においてであった，とはもはや言えないということである。そして，このわたしの主張の妥当性は，わたしが先に扱った例の最終定理についてさえ成り立つことである。何故なら，その証明の第5ステップには，この別証明とは逆に，対角線にあたる EZ が単位ではないことの証明が含まれていたが，その奇異な証明の必要性は，この証明を与えた人物が，別証明の著者と同様に，単位を数ではないとする信念を共有するとともに，そもそも1が正方形を表現しうるなどということはもってのほかのこととして，不条理そのものだと考えていたとするならば，理解可能となるからである。というのも，EZ が1であるとするなら，ピュタゴラスの定理により $EZ^2=2H^2$ であり，他方，1^2 は1であるのだから，1は偶数だということにならざるをえないであろうが，そもそも1は，偶数でも奇数でもなく，否，数ですらなかったからである。したがって，この最終定理を与えた人物もまた，1辺が1である正方形における対角線と辺との関係については，これを考慮の外に置いたとしなければなるまい。

こうしたアルカイックな見解がユークリッドその人の数論と相隔たるところは大である。それゆえにこそハイベルクは，これを第X巻の他の諸命題から切り離し，巻末の付録にまわしたのである。

上に述べてきたことが含意するところは大きいと思われる。しかし，予定した最終定理の証明構造そのものについては一通りのことを述べた。ひとまず筆を置くこととしたい。

1992・10・31

本稿は，日本私学振興財団の平成4年度学術研究振興資金の援助を得て成ったものである。