弾性学と材料力学の歴史
(Ⅱ-12)

アイザック　トドハンター著
カール　ピアソン編著
(訳)　村上一男[1)]　並川宏彦[2)]　村上一實[3)]

第V節
注釈付きのクレープシュ。

〔298.〕 **『クレープシュの固体の弾性学』**(*Théorie de l'élasticité des corps solides de Clebsch.*) **ドゥ．サン・ブナン氏の広大な覚え書とともに，バレ．ドゥ．サン・ブナン氏とフラマン氏によって翻訳された。パリ，1883年，1～900頁。**(*Traduite par MM. Barré de Saint-Venant et Flamant, avec des Notes étendues de M. de Saint-Venant. Paris,* 1883, *pp.* 1-900)〔しかし下付き文字によって，頁数は，たとえば 480. *a*—480.*gg* のように，現れているよりもずっと多い〕。

これは弾性学に対するサン・ブナンの最後の重要な，そして，最も完全な貢献である，と言うことができる。彼は，脚注，節注そして付録によって，クレープシュが示した内容をほとんど三倍にしている。そして，その結果は数理物理学の観点からの弾性学についての論文であり，それはこの主題についての標準の著作として永く残るだろう。

われわれがすでに古くなった研究についての未刊の別の結果を報告することによって，より一層の広がりを示すことができるこれらの説明と付録によって，人々がそれにある程度の注意を払うことを望むなら，われわれが示した翻訳が実際に有用であり，建築術と非常に密接な関係をもっている数理物理学の素晴らしく，かつ興味ある分野がますますよく理解され，研究され，そして応用されることを，われわれは期待する〔xxi 頁〕。

クレープシュの弾性への貢献によって，われわれは後程忙しくなるだろう。彼の著作の本文に関する限り，彼の等方性公式はいたるところで均質性の適当な分布についての式で置き換えられており〔本書 114 節参照〕，また彼の論述の中の種々の不明瞭なところは豊富な脚注において説明され，あるいは訂正されていることを，ここで注目さえすればよい。次に続く節では，本書へのサン・ブナンの貢献のみを分析しよう。

〔299.〕 サン・ブナンの最初の重要な覚え書は39—42頁に出てくる。それは**『引張成分の式の線形形式についての証明は純数学的にはできない』**(*La preuve de la forme linéaire des expressions des composantes de tensions ne peut pas être purement mathématique.*)と筆頭に載せている。これは**『ナヴィエの講義』**(*Leçons de Navier*) の 662—5 頁と同じ内容〔本書192節(*a*)と928*節参照〕，すなわち応力—ひずみ関係の線形性のすべての純数学的推論の無益なことを取り扱っている。このような推論はグリーン，クレープシュ，トムソンやその他の人々によって示されている。本書928*節と第Ⅰ巻1164*節の脚注参照。

一般的かつ哲学的には，純数学的ないかなる考察も，物体要素に働く力と側面の長さや側面の角度のようなものに起こる幾何学的変化の相互依存の様式を明らかにすることはできない。この様式の認識は事実または確認された事実の全体を表わす何らかの物理学的法則からしか導くことができない〔39頁〕。

サン・ブナンは実験に訴え，承認を得てスト

1)　立命館大学理工学部　名誉教授　2)　本学文学部　3)　大阪産業大学短期大学部

ークスの音の振動の等時性の例証を引用している。本書928*節参照。しかしながら，われわれは多くの実用構造材料において，わずかな弾性ひずみに対して，応力―ひずみ関係は線形として扱うことができないことを，他のところで述べている。第Ⅰ巻の891頁の注釈D参照。

〔300.〕 しかし，サン・ブナンは実験と観察に訴えることで満足していない。これらはニュートン学説の引力の後楯なしに，ケプラーの法則を与えている。

一般に，われわれの意図を納得させるためには，少しも説明しない経験主義は十分ではない。われわれに示された公式が十分一般的で，十分**偉大な**，すなわち単純なある法則に依存しているという説明，科学的な理由がさらに必要である。これは，それが直観的な方法でしかないときには，ライプニッツが成したように推論して，最高権力をもつ立法者が，問題にしている公式が外部の表示を表わし，かつ測っている本質的な現象に従順な法則であり得ると見なすことができるためである〔40—1頁〕。

サン・ブナンは分子間中心作用の法則において，この**十分一般的で，十分偉大な法則**を単に距離の関数として見出しており，また，ニュートンからクラウジウス(Clausius)までの主要な物理数学者達によってそれが受け入れられたことを引用している。そこで，彼は**十分偉大な法則**として，われわれが知っているように，テーラーの定理に訴えたグリーンと彼の門人たちにふれている。さて，グリーンによって認識されていないとはいえ，21個の独立定数についてテーラーの定理へのこの訴えの背景には，恐らく分子間作用が個々の分子に依存しているだけでなく，宇宙内の各々の分子の対の他の分子に対する相対的な位置にも依存している，という重要な概念があった。たとえば，分子間作用が流動性エーテル内の分子振動から生じるならば，分子間力は分子表面エネルギーの関数であり，その表面エネルギーはそれ自身他の分子の全体に対する相対的な位置の関数であることが分かる。このようにして得られる分子間力の法則は，われわれが持っている熱と光の現象の知識を用いて，いかなるより単純な法則よりもはるかによく全物理学世界を統合する傾向があるかもしれないとはいえ，**単純**でないことは確かである。サン・ブナンはここで，**十分偉大な法則**が必然的に**十分単純**でなければならない**最高権力をもつ立法者**の披露によって，**付録Ⅴ**の議論〔本書192節(a)参照〕を強調しないらしい。実際に，その仮定は極度に擬人的である。熱や光現象を考えるとき，――また，分子のありそうな振動やエーテルの存在に注目するとき――分子間作用の法則が，その性質はどうあろうとも，決して宇宙内で主要なものでないことは全く確かであろう。それは分子やエーテルの構造の結果であるに違いない。それは確かに**偉大**であるかも知れないが，しかし，**すなわち単純な**，の追加は，オイラーの，**作られた世界は最も完全である**，を思い起こさせる擬人的な教義である。

〔301.〕 次に，63—111頁を占めている§16の**最後の覚え書**を考えなければならない。

その覚え書の§§1—12〔65—75頁〕は再び係数の議論に関係しているが，**付録Ⅴ**の論議とは異なる議論の道筋を取り上げている。本書192—5節参照。サン・ブナンはここで，本来，仕事の原理と永久運動の不可能性へのグリーンの訴えが，弾性定数の15個への減少をどの程度含んでいるかを問うている。

〔302.〕 彼は次の方程式からはじめている。

$$\Sigma mV^2/2 + \Psi(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'' \cdots) = \text{ある定数 } C \quad \cdots\cdots (a)$$

ここで，Vは重心位置がx, y, zである分子mの並進速度である。ダッシュが付けられた文字は他の分子m', m''等の位置を与える。言い換えれば，彼は，系の**全並進**エネルギーを分子の位置の関数にしている。彼は次のことを省略している。

(1) 運動エネルギーから，その原子の振動によって，あるいは同じ分子の原子の相対運動における変化によって，起こりうる分子の内部の振動運動；

(2) 分子それ自身のひずみによって，あるいは他の分子に関するその**状況**の変化によって，

起こりうるポテンシャル・エネルギーの要因。

このように，彼が分子の重心の並進エネルギーを単に分子の位置の関数のみとしているのは正しいのか？　彼は，激しい原子運動を生じるような温度の変化がなく，また，多数の平均をとるとすれば，省略(1)と(2)の両方とも正しいと考えているらしい〔彼の本の§12参照〕。しかし，温度が依存すると考えられる平均の内部運動エネルギーは変化しないままであるとはいえ，分子の平均内部ポテンシャル・エネルギーが弾性ひずみによって変化するかも知れないことはあり得ることではないのか？　分子のポテンシャル・エネルギーにおけるこの変化は相対的な分子位置の関数であろうが，それは重心位置と同様に状況の関数であるかも知れない。しかし，グリーン[1]とサン・ブナンの両氏とともに，状況が重心位置にのみ依存することを認めるならば，目立つほどの熱変化がないと仮定して，方程式(a)に後戻りさせられる。

〔303.〕　§5においてサン・ブナンは，方程式(a)がグリーンが必要としたΨの形式を与えることができるかどうかを問題にしている。彼は

$$\Sigma mV^2/2+\Psi_1(r, r', r''\cdots\cdots)=C\cdots\cdots(b)$$

なる形式の方程式によって，それを置き換えることができる，といっている。

ここで，r, r', r''……は固定した外部の作用中心の間と同様に系の分子間距離であるとして，Ψ_1は変数r, r', r''等々が部分的に互いに依存しているのかしていないのかはほとんど重要ではない新しい関数である〔68頁〕。

この変化は合理的であるのか？　形式(a)は分子間作用が状況の関数である可能性を保持している。これは(b)の中で失われているのか？——それはいくつかの変数rが外の定点からの距離であるならば，そうであるとは思われない。この方程式から，任意の分子mに対して代表的な方程式：

$$m\ddot{x}=\Sigma\frac{d\Psi_1}{dr}\cos(rx)\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

を容易に推論する。ここで，Σはrのすべての値に関する総和を示す。そこで，研究の残りの問題は$\dfrac{d\Psi_1}{dr}$, $\dfrac{d\Psi_1}{dr'}$, $\dfrac{d\Psi_1}{dr''}$……がそれぞれ単にr, r', r''……の関数であるかどうかである。もし，そうであれば，36個の係数は15個へ減少する。もし，そうでなければ，一つの分子の別の分子への作用は，(1)相互の状況に，(2)他の分子の位置に，依存し得る。各々の分子対の相互作用の，単にそれらの重心距離への依存関係は，サン・ブナンが述べているように，力学についての多くの著者が彼らのエネルギー保存の証明〔たとえば，ヘルムホルツ〕の基礎を形成している仮定である。同時に，原子以上のものに対してそれを仮定することは必要ないらしく，また分子に対しては，状況が実際に重要であるかも知れない。

〔304.〕　さて，サン・ブナンはこの仮定を否認することからいかなる結果が出てくるかを研究することへ進んでいる。二つの分子間の作用がそれらの他の分子からの距離の関数であり，それら相互の距離のみの関数ではないだろう，と彼は述べている。その作用は単にそれらの他の分子からの距離に必ずしも依存するものではなく，また，多分状況に影響を与えるそれらの仮想分子あるいは固定中心からの距離に依存する，と私には思われる。サン・ブナンは先ず第一に，分子間力が単一の分子間距離以上のものの関数であるならば，完全サイクルの中でなされた仕事は一般に零であり得ないことを証明しようとしている。彼が観察しているように，二つの分子を相互の距離rから移動させるとき，ここで，その作用はR_1で，再びそれらを相互

1)　グリーンとウイリアム・トムソン郷の両氏は，要素のポテンシャル・エネルギーが形の変化すなわち分子の重心の相対的位置のみの関数としている。これは分子の内部ポテンシャル・エネルギーがただ重心位置の関数であり得ると仮定している，と私は考える。しかし，要素〔あるいは分子のどちらか〕の内部ポテンシャル・エネルギーが要素〔あるいは原子〕の相対運動の関数であるということかも知れない。その場合，速度はΨ_1の中に出てくるだろう。ハミルトンの方法によって弾性に対するグリーンの方程式とは全く異なる方程式を得るだろう。消散関数などを導くこれらの一般化した弾性方程式を，私は別の場所で論じよう。

の距離rへもって来ると，その作用R_2はR_1に等しい必要はなく，したがって，他の分子間距離が二つの位置において同じでないとすれば，仕事の成分R_1drと$-R_2dr$は等しくかつ反対である必要がない，ということは全く本当である。一対の分子によって引き起こされた正の仕事が分子の残りの対の作用によって引き起こされた負の仕事に正確に等しいことのみが必要である。このことには何かありそうもないことがあるだろうか？　サン・ブナンは次のように考えているようである。

さて，二つの分子間の作用の強さと他の分子の**単なる存在**へのそれらの依存の様式を支配していると想像できる法則がどんなであろうと，われわれが述べているように，あるサイクルを巡回する一定の系の二つの部分の間に正確な相殺が守られるならば，これらの系に限り無く変化することができる他の系を加えることによって，また任意に選んだある他のコースをそのコースに加えることによって，その法則は守られなくなるだろう。

1サイクルで生じる全仕事が零であることは，**それぞれの個々の作用のために**それが起こるかぎりでしか一般的であり得ない。これはRと名付けた力がrと名付けた**距離だけの**関数であると認めさせる〔71頁〕。

私は，**加えることによって，それは守られなくなるだろう**，という言葉の次にくる議論を理解できない。分子が電磁石によって示されたと仮定すると，このような一つの磁石Aのもう一つの磁石Bへの任意の運動中の全作用は，AとBの最初と最後の**相対**位置に依存するのみならず，その場における他の物体に関しては誘導電流のためにAとBの経路と位置に依存するだろう。サン・ブナンの議論はその場に他の磁石を採り入れることによって，あるいは固有の方法でそれらを周りに動かすことによって，永久運動を得ることができる，と主張するのを強要するだろう，と私には思われる。

〔305.〕　サン・ブナンの別の議論は次のような種類のものである〔彼の本の§9参照〕。分子間力が個々の重心間距離以上のものに依存するならば，星の世界の分子の間の距離は地球上の分子の間の作用に影響を及ぼすだろう。先ず第一にここには，多少の仮定がある。BへのAの作用はCとDからの両方の距離に依存するが，DからCの距離には必ずしも依存しない。たとえば，AとBにのみ関係している固定中心によって与えられるように，**状況の**影響を扱うときには，こういう実情かも知れない。サン・ブナンは続けている。地球上での星の世界の分子間距離の影響は全然感じないに違いない。というのは，地球上の物質の小部分を扱っているときでさえ，その分子の作用は認識できる距離でも他の物質の状態にかなり無関係であるから。

このことから，$\Psi_1, (r, r', r'', \cdots\cdots)$の形式は任意の微小系に対して，$d\Psi_1/dr$が$m$のすぐ隣の分子だけにかなり依存するとすべきである。この除外の条件はΨ_1を$r, r', r'', \cdots\cdots$の逆ベキの関数とすることによって，**かなりの**距離にある分子に対して，容易に満たされ得る。さて，サン・ブナンの実際の言葉を引用しよう。

しかし，この明白な除外の方法は特にこれらの系のそれぞれに属する分子の相互の距離，あるいは係わっている分子に近くない要素に関しては無効である。さらに，同じ物体中でそれらに隣接する分子の小さな距離が，関数$\Psi_1(r, r', r'', \cdots\cdots)$の形式に，より一層大きな制限あるいは特殊化を課さない限り，それぞれの星形から成る分子の間のごく僅かの相互の距離は$d\Psi_1/dr$の大きさに，あるいは地球上の物体の二つの分子m, m'の相互作用の強さに，同じ物体内で隣接する分子の小さい距離と同じ程度の影響をもつだろう〔72頁〕。

AのBへの影響が，CとDの間の距離によって影響され，それだのにCとDがAとBからともに離れているときに零になる，という関数の形式を発見することの難しさを，読者は実際に見出すだろう。しかし，その発見は不可能とも思われないし，また，その応力の状態によってAとBの間に作用を生じるようなエーテルを考えるとき，CとDの接近がAのBへの作用に影響することが決して起こりそうもないと思われる。

しかし，AのBへの作用に影響するのは，AとBのCとDからの距離のみであると仮定するならば，問題にさほど困難はない。特別重要なこの場合はサン・ブナンの注意を免れたようである。このようにして，$\phi'(r)$を分子間作用の法則とすると，それはrのかなり大きな値に対して作用を与えず，また常に$r>\beta$で，β/rが小さい量であるために，βより小さいrのすべての値に対して強い反発作用を与える。$f(z_1,$

$z_2, z_3, \cdots\cdots$）を変数 $z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots$ の関数とすると，それは z_r が小さいとき，実際上 z_r と無関係である。そのとき，Ψ_1 は次のような形式が適当である。

$$\Psi_1 = \Sigma\phi_{pq}(r_{pq})\{m_p m_q + \beta_{pq} f_{pq}(\beta_{pn}/r_{pn}, \beta_{sq}/r_{sq}\cdots\cdots)\}$$

ここで，関数 f_{pq} の変数において，n と s は p と q を除くすべての値を採らねばならない。最後に p と q のすべての異なる値に対して式を合計しなければならない。

$(\beta/r)^2$ は省略できるので，f' は出てこないだろう。したがって，$d\Psi_1/dr_{pq}$ は n と s がともに p と q とは異なるとき，r_{ns} と無関係であろう。そのために，サン・ブナンの反対は失敗に帰する。

しかし，C，Dの位置と無関係なA，Bの作用を仮定することを強いられもしない。分子の状況かまたは内部位置座標のいずれかとして $q_1, q_2, q_3, \cdots\cdots$ をとる。例証のためには各分子に対して一つで十分であろう。そのとき，系のポテンシャル・エネルギーが——エーテル中の応力の結果として——一般化された速度 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$, などを含むことはきわめてもっともらしいと思われる。そのために，Ψ_1 に対して $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3\cdots\cdots r, r', r''\cdots\cdots$ の関数を書かねばならない。この場合，方程式は次の形式のものとなるだろう。

$$\frac{\Sigma mV^2}{2} + \frac{\Sigma\alpha\dot{q}^2}{2} + \frac{\Sigma\gamma_{sn}\dot{q}_s\dot{q}_n}{2} + \Psi_1(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \cdots\cdots r, r', r''\cdots\cdots) = \text{一定} \qquad \cdots\cdots\cdots(d)$$

ここで，α と γ はある定数である。Vの値と $\dot{q}$ の値を決定するために，一般の力学方程式を適用しなければならないだろう。したがって，m_1 とm_2 の間の分子間力は q_3 の関数であって差し支えない。それは順番に，たとえば，m_3, m_4 等々の間の距離である r' と r'' などの関数として力学方程式から求めてもよい。ところが，r', r'' は m_1 と m_2 の間の作用に**直接に**影響を及ぼさないだろう。本書931*節，1529*節参照。

その問題は運動の第二法則の物質の究極の粒子への**直接の**適用に実際に関係するので，大いに物理学的興味がある。BのAへの作用にCのAへの作用を重ねることができるかできないのか，あるいは，CのAへの作用がBのAへの作用に影響を及ぼすのか？　本書の276節の脚注を参照されたい。

〔306.〕　少定数議論の強い点は（i）AのBへの直接的な作用に比べてCのBへの間接的な作用の**ありそうな**無意味さ，（ii）少定数に反対して今までに集められた実験の大部分の不十分なこと，にあると思われる。

このことはとにかく，私はなお，サン・ブナンの次の陳述を満足なものとして受け入れることはとてもありえないと思う。

上に示された形式あるいは特殊化，すなわち

$$\Psi_1(r, r', r''\cdots\cdots) = f(r) + f_1(r') + f_2(r'') + \cdots\cdots$$

をぜひとも取り入れなければならない，と私は大胆に主張し，また私が説得したすべての人は私と同様に考えるだろう。

……このように実験そのものによって必要とするように，それは，作用の法則について，他の距離ではなしに**それらが働く距離だけの関数**の採用へ戻らせる。事実の一般的な観察で助けられたただの公正な判断力が1世紀半以上の間受け入れさせた法則。そして，私はグリーン自身がわからずにそれを信じていたと確信している。私は実際，物理学者や数学者のこの直観，「宇宙内の力が**永久運動を本来不可能とするように規定されている**」というこの意見を，他の方法で解釈することはできない。何の疑いもなしに，グリーンは**特にそれぞれの相互の分子作用に逆の可能性**を認めなかった……〔72頁と73頁〕。

グリーンが多定数から出てくる重要な物理学的結果を完全にわかっていたかどうか疑わしいが，その場の異なる点で，同じ距離まで戻ったときに，二つの分子が仕事をしたことに，なぜ彼が異議を唱えたのか，私にはわからない。§12〔74—5頁〕において，サン・ブナンは原子作用とそれらの合成結果，すなわち分子作用との間の差異を認めている。しかし同時に，後者が本当に**状況**の関数であるならば，平均の原理に基づいて型 $|xxyy|$ と $|xyxy|$ の係数に何も大きな相違を生じないだろう，と彼は考える。これらの少定数見解にもかかわらず，彼は**クレープシュ**の本の中で，少定数の同じ係数に対して，ダッシュによって区別された文字を抜け目なく採用している。

〔307.〕 75—84頁（§§13—16）に，サン・ブナンは1863年と1878年の論文の結果，すなわち『**ナヴィエの講義**』，808頁以下の結果を再録している。本書151節と198節(e)参照。§15に示された結果はまさに1834年にノイマンによって得られたものである。本書796*節参照。本書の記号法において，a, b, c が直伸び係数，d, e, f が直すべり係数，そして d', e', f' が横伸び係数であるとき，弾性対称の3平面をもつ材料に対して，

$$\frac{(bc-d'^2)}{1/E_x}=\frac{(ca-e'^2)}{1/E_y}=\frac{ab-f'^2}{1/E_z}$$
$$=\frac{ad'-e'f'}{1/F_x}=\frac{be'-f'd'}{1/F_y}=\frac{cf'-d'e'}{1/F_z}=\Delta$$
$$=\begin{vmatrix} a & e' & f' \\ e' & b & d' \\ f' & d' & c \end{vmatrix}$$

である。

さらに，代表的な応力—ひずみ方程式として，

$$s_x=\widehat{xx}/E_x-\widehat{yy}/F_z-\widehat{zz}/F_y$$

を得る。そこで，$1/E_x$，$-1/F_z$，$-1/F_y$ 等々はランキンの *thlipsinomic* 係数である。本書第XI章参照。

その上に，引張—圧搾比に対して，

$$\eta_{yz}/E_y=\eta_{zy}/E_z=1/F_x$$

の型の方程式を得る。

〔308.〕 §17の中で，サン・ブナンは**非結晶体**，すなわち次の関係が成立する物体を扱っている。

$$2d+d'=\sqrt{bc},\ \ 2e+e'=\sqrt{ca},\ \ 2f+f'=\sqrt{ab} \qquad \cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

もし，量

$$\frac{1}{2}(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2,\ \ \frac{1}{2}(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2,$$
$$\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$

が小さいならば，これらの関係は

$$2d+d'=\frac{b+c}{2},\ \ 2e+e'=\frac{c+a}{2},$$
$$2f+f'=\frac{a+b}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

と書くことができる。

1863年と1868年の論文参照，あるいは本書の139節，142—4節および281節参照。

サン・ブナンは，たとえば引き抜き金属あるいは圧延金属，またある種の石のように，永久圧縮によって生じた弱い程度の異方性に対して，関係(i)あるいは(ii)で十分である，と考えている。しかし，木材に対しては，他の若干の条件が成立しなければならない。というのは，

(a)関係(ii)は等しい横方向弾性〔すなわち $a=b$〕と少定数について成立すると仮定すると，そのとき

$$3f=a,\ \ 6e=c+a \ \text{および}\ c=6e-3f$$

である。

307節の公式から次のことが容易に分かる。

$$\eta_{zx}=\frac{1}{4}e\Big/f,\ \ E_z/E_x=\frac{1}{8}\left(18e/f-\frac{e^2}{f^2}-9\right)$$

それから

$$\eta_{zx}=9/4-\frac{1}{2}\sqrt{18-2E_z/E_x}$$

すなわち，伸び—圧搾比が実数であるために，$E_z/E_x<9$ でなければならない。

この結果はハーゲン（Hagen）の実験によって否定されている〔本書1229*節参照〕。ハーゲンは次の値を求めた。

$$E_z/E_x=\begin{cases} 15 & \text{オーク材に対して} \\ 22.5 & \text{ぶな材に対して} \\ 48 & \text{松材に対して} \\ 83 & \text{もみ材に対して} \end{cases}$$

(b)関係(i)は $a=b$，$d=e=d'=e'$ とともに成立すると仮定すると，

$$\eta_{zx}=\frac{1}{4}e/f,\ \ E_z/E_x=e^2/f^2$$

ということになる。

それから，

$$\eta_{zx}=\frac{1}{4}\sqrt{E_z/E_x},\ \ E_z/G=\frac{5}{2}\sqrt{E_z/E_x}$$

である。

これらの式は決して虚ではなく，$E_z/E_x=4$ にいたるまで η_{zx} に対して適正な値を与える。この後は η_{zx} が $E_z/E_x=80$ に至るまで不適当な値を取りはじめて，η_{zx} は2.236ほどに大きくなる。

クレープシュ〔8頁，§2〕と一時はサン・ブナン〔本書169節(d)参照〕も必然的に $\eta<1/2$ でなければならないと考えていた。サン・ブナンは『**ナヴィエの講義**』の補遺で，この誤りを認めていた。そしてそのとき，彼は次のことを付け加えている。

この意見はいかなる事実にも基づいていない。それは**等方性物体に対する**と同じように言い表わしていない。そして，ヴェルトハイムのいくつかの実験は金属棒の破壊付近で，すなわちその材料が木材に比べ得る極めて繊維のある状態に達したときに，伸びがさらに体積を減らすことを示した。したがって，$\eta=2.236$ に達することができなくても，柔らかい木材に対して η を1まで持って行くことは少しも構わない〔89頁〕。

さて，サン・ブナンは E_z/E_x が大きいとき，η_{zx} にこれよりよい結果を与える無定形公式（i）のある補正をしようと努めている。

〔309.〕 彼は先ず89—95頁において，ノイマンの伸び係数の4次式を決めることへ進んでいる。彼はそれを

$$\frac{1}{E_r}=\frac{c_x^4}{E_x}+\frac{c_y^4}{E_y}+\frac{c_z^4}{E_z}+2\frac{c_y^2c_z^2}{F_1}+2\frac{c_z^2c_x^2}{F_2}+2\frac{c_x^2c_y^2}{F_3} \quad \cdots\cdots\cdots\text{(iii)}$$

の形式で得ている。ここで，c_x, c_y, c_z は線 r の方向余弦である。また，

$$\left.\begin{aligned}1/F_1&=1/(2d)-1/F_x\\1/F_2&=1/(2e)-1/F_y\\1/F_3&=1/(2f)-1/F_z\end{aligned}\right\}$$

である。

ノイマンの $N_a, N_c, M_b, M_c, P_a, P_b$ が実際横伸びであり，したがって負の記号[1]であることに注意するとき，これはノイマンの結果と一致する〔本書799*節参照〕。

$$x=c_x\sqrt[4]{E_r},\quad y=c_y\sqrt[4]{E_r},\quad z=c_z\sqrt[4]{E_r}$$

を取ることによって，4次の表面を得る。その動径は同じ方向に $\sqrt[4]{E_r}$ の長さを示す。

〔310.〕 サン・ブナンは§21〔95—8頁〕で，種々の方向に対する E の最大値と最小値の長い計算を取り上げている。形式

$$F_3=\sqrt{E_xE_y} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iv)}$$

の三つの関係が成立するならば，(iii)式はだ円となり，弾性のだ円分布を得る。これは E_r に対する三つの極大と極小のみを与える。サン・ブナンは形式(iv)の関係が満たされないとき，表面の式(iii)に対して三つの極大のみがある場合の条件を調べている。言い換えれば，彼が言い表しているように，**弾性の単純で漸進的な変化**があるときを調べている。

この条件は

(1) F_1 が E_y と E_z の間および同じ形式の他の二つのものの間にあること

(2) 形式が
$$(1/E_y-1/F_3)(1/E_z-1/F_2)+(1/F_3-1/F_1)(1/F_1-1/F_2)$$

である三つの方程式がすべて同じ符号とは限らないだろうということである。

〔311.〕 §22において，サン・ブナンは，$\dfrac{d}{d'}=\dfrac{e}{e'}=\dfrac{f}{f'}$ かあるいはまた少定数が成立すると仮定されるならば，形式 $F_3=\sqrt{E_xE_y}$ の三つのだ円条件が形式 $2f+f'=\sqrt{ab}$ の三つの式と同じであることを示している。

〔312.〕 彼は次に，本書310節の単純な変化に対する条件を満足するある非だ円分布について調べている。彼はもっともらしい解として次のものをとる。(1)少定数，そして(2)二つのだ円関係，すなわち彼は $a=3ef/d$，$b=3fd/e$ と書き，これらの条件を満足する $c=3de/(fn)$ の n の値を求めている。幾分複雑な解析の後，必要十分条件が，$E_z>E_x>E_y$ と仮定して，

$$\frac{9+12E_z/E_x-\sqrt{81+144E_z/E_x}}{2+4E_z/E_x}>n>\frac{12+9E_z/E_x-\sqrt{144E_z/E_x+81(E_z/E_x)^2}}{4+2E_z/E_x}$$

となることが見出されている。

その後，サン・ブナンは E_z/E_x の1から80までの種々の値とまた∞に対して，n と

$$\eta_{zx}=\frac{1}{4}\frac{d}{f}=\sqrt{\frac{n}{18-2n}\cdot\frac{E_z}{E_x}}$$

の極限値の表を示している。

ここで，η_{zx} の値は n の適当な値が選ばれるならば，ありうることがわかる。これは何だろうか？

〔313.〕 n についての実験式

$$1/n=1+\frac{1}{\gamma}(E_z/E_x-1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(v)}$$

が104頁に提議されている。サン・ブナンは105頁に，γ が数値9と22.22のとき，パラメータ E_z/E_x〔=1から80〕に対する n と η_{zx} の値を表にしている。γ に対するこれらの値は，それらが $E_z/E_x=80$ についてそれぞれ $\eta_{zx}=$約2/3と1を与えるので選ばれている。表はまた E_z/e〔=横方向等方性で E/μ〕の相当値を含んでいる。これらの値は第一仮定〔$\gamma=9$〕に基づいて2.5から78.2まで変わり，第二仮定〔$\gamma=22.22$〕に基づいて2.5から52.67まで変わる。したがって，比 E/μ は非常に大きくなり得るが，非常に大きい E_z/E_x に対して，これは少しもありそうもないと思われないし，少なくとも今はそれを否定する実験はない。γ の値に関しては，9あるいは22.22に限る必要はないが，一般に，それを7あるいは8から30までとってよい〔108頁〕。**$\gamma=16$ で行うならば，間違える危険はほとんどないだろうと思う**〔108頁〕。

サン・ブナンが観察しているように，〔曲げによって〕E_z と E_x，〔ねじりによって〕μ，そして〔引張力下の棒の横方向の寸法の精巧な測定によって〕η〔$=-s_x/s_z$〕を決定するために，新しい実験の大なる必要がある。

1) 残念ながら，796*節には量 M, N, P のすべてに逆の符号が与えられている。これらが訂正されるならば，795*節の第2表の中の $1/F$ などの前に負の記号を入れなければならない。そのとき，799*節の $1/E_r$ の値は正確である。私はノイマンのこの過ちを見逃したことを残念に思う。

〔314.〕 実験がないときは，石，木のような，また橋や機械の建造に用いられた金属のような，無定形異方性固体に関する弾性問題についての多分最も十分な公式として，最後に次の式を採用してよい。

$$\left.\begin{aligned}\widehat{xx}&=\frac{3ef}{d}s_x+fs_y+es_z, & \widehat{yz}&=d\sigma_{yz}\\ \widehat{yy}&=fs_x+\frac{3fd}{e}s_y+ds_z, & \widehat{zx}&=e\sigma_{zx}\\ \widehat{zz}&=es_x+ds_y+\frac{3de}{nf}s_z, & \widehat{xy}&=f\sigma_{xy}\end{aligned}\right\}\cdots\text{(vi)}$$

ここで，各点では，yz, zx, xy は弾性対称の三つの直角の平面であり，z は最大弾性抵抗の方向であり，一般に「縦方向」すなわち，木の場合には繊維の方向で，あるいは金属棒では柱体軸の方向である。金属板では，それは一般に板面に垂直であろう。

量 n は方程式(v)によって決定されねばならない。ここで，よりよい値を示唆するその後の実験データがないとき，γ は$=16$ととってよい。

$E_z=\dfrac{de}{f}\dfrac{6-n}{2n}$ であるから，三つのねじり実験と一つの引張実験は d, e, f と n，すなわち応力―ひずみ関係(vi)のすべての定数を与えることは明白である。

実際に，$\widehat{zz}$ の値を次のように書くことができ，したがって全く n を除くことができる。

$$\widehat{zz}=es_x+ds_y+\left(E_z+\frac{1}{2}\frac{de}{f}\right)s_z$$

横方向等方性の場合について，$E_z=E$, $d=e=\mu$, $f=\mu'$ ならば，次式を得る。

$$\left.\begin{aligned}\widehat{xx}&=\mu'(3s_x+s_y)+\mu s_z & \widehat{yz}&=\mu\sigma_{yz}\\ \widehat{yy}&=\mu'(s_x+3s_y)+\mu s_z & \widehat{zx}&=\mu\sigma_{zx}\\ \widehat{zz}&=\mu(s_x+s_y)+\left(E+\frac{\mu^2}{2\mu'}\right)s_z & \widehat{xy}&=\mu'\sigma_{xy}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\text{(vii)}$$

ここで，μ と E は実験的に決めることは容易であるが，μ' はずっと困難である。

サン・ブナンは，彼が実際上多分十分に正確だと考えている μ' についての次の実験公式を与えている。

$$\frac{\mu'}{\mu}=1-\beta\left(\frac{2}{5}-\frac{\mu}{E}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(viii)}$$

式(v)の γ を$=9$ととるとき，$\beta=5/3$，すなわち

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\frac{\mu}{E}$$

式(v)の γ を$=22.22$ととるとき，$\beta=2$，すなわち

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{1}{5}+2\frac{\mu}{E}$$

これらの β の値について，μ'/μ と μ/E の相当値は方程式(v)から得たものとはわずかに1/16だけ異なる。

われわれがこれらの結果を再録しているのは，ある点までは経験的であるとはいえ，それらは実用材料に対して今までに提議された最も有望な公式を供給するからである。このような公式は大いに必要であり，いつものようにサン・ブナンは実行の必要を最初に認めたことである。

〔315.〕 §22〔142―5頁参照〕までのサン・ブナンの覚え書は柱体の曲げとねじりの歴史を簡単に取り扱っている。それは『歴史概論』(*Historique Abrégé*) の中の同じ主題の節に何ら貢献していない。174―90頁を占めている§28に付属したもっと長い覚え書へ進もう。

〔316.〕 この覚え書はサン・ブナンの曲げとねじりの解の実際に生じるような場合への適応性に関係している。最初の4節〔174―7頁〕は，静的に均等な荷重の近似的な弾性等価について，**ねじり**の論文または『**ナヴィエの講義**』(*Leçons de Navier*) の中ですでに述べられた議論を再録している。本書8節，9節および170節参照。残りの節〔§§5―17〕は，サン・ブナンが彼の解の基礎としてとった仮定

$$\widehat{xx}=\widehat{yy}=\widehat{xy}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

の正当性を弁護する論拠を調べている。言い換えれば，すべての実際の負荷に対して，隣接した縦方向繊維の間の柱体の横断面に**平行な**相互作用はほとんどないかまたは全くない，と仮定することが正当なのだろうか？

長さが断面の一次寸法に比べて大きい棒についてのみ正しい何らかの仮定を含むものとして，棒の問題についてのポアッソンとコーシーの労作〔本書466*節と618*節参照〕に言及した後，サン・ブナンはキルヒホッフの研究が仮定(a)に何かよい妥当性を示すかどうかを調べている。キルヒホッフはこれらの問題となる関係の必然性ではなく，可能性のみを証明している，と彼は指摘している〔181頁〕。本書387節の脚注参照。

〔317.〕 サン・ブナンは次に，1871年と1879年のブシネスクの論文を調べている。後でブシネスクの研究のわれわれの議論を参照されたい。サン・ブナンは，これらの論文の方法を三つの弾性対称面をもつ均質材料の棒の簡単な場合へ

適用している。

仮定(a)からはじめる代わりに，サン・ブナンは柱体軸の方向を z として次の条件が成り立つと仮定している。

$$\frac{d^2 s_x}{dz^2}=\frac{d^2 s_y}{dz^2}=\frac{d^2 s_z}{dz^2}=\frac{d^2\sigma_{xy}}{dz^2}=\frac{d\sigma_{zx}}{dz}$$
$$=\frac{d\sigma_{zy}}{dz}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (b)$$

これらは，**たとえ厳密ではないにしても，すぐれた近似である**，と述べている。

条件(b)から条件(a)は弾性仕事の原理によって導かれる。その証明は**棒**，すなわち長さが横断面の一次寸法に比べて大きい柱体についてのみ成り立つ。しかし，横断面は少し変化すると仮定してもよく，また，棒の任意の長さの要素上の物体力が要素の端末横断面上の表面応力または荷重を越えない限り，端末荷重も物体力の分布も完全に一般的なものである。

〔318.〕 条件(b)は条件(a)ほど仮定していないのかどうか？ 質問してもよい。サン・ブナンが条件(b)に到達する議論を再録しよう。曲げが**座屈**によるものであるとき，私には，条件 $d^2s_z/dz^2=0$ は正しいとは思われない。長い棒の場合の座屈は言及された荷重分布によって除外されているとは思えない。本書911*節参照。

各場所で横断面の重心の直線を z 軸にとり，一つの断面上で互いに直角で，この直線に直角に x，y 軸をとろう。われわれが述べている部分で，それらが横の寸法に比べて非常に長いと仮定されているので，われわれが長いと呼んでいる部分のあるものでは，引張応力成分と膨張またはすべり s,σ は，縦方向 z で x，y 方向よりも比較にならないほど小さい速さで変化することが容易に認められる。したがって，局部的または不連続的な力の作用点がある端面に隣接した棒の小さい部分を除外すると，これらの変形 s,σ の z に関する導関数は，必ず x および y に関する導関数よりもかなり小さいだろう。実際，たとえば，σ_{zx} について，$d\sigma_{zx}/dz$ はこの変形 σ_{zx} を棒の長さまたは考えている棒の長い部分で割った商の大きさぐらいまたは σ_{zx} の端面での値の差の大きさであろう。同様に，$d\sigma_{zx}/dx$ は σ_{zx} を長さのごく小さい分数に過ぎない半分の厚さで割った商の大きさぐらいであろう。言い換えれば，考え方をはっきり決めるために，長さが平均の横方向寸法の大きさぐらいの断片に，想像上で棒を分割すると，s,σ は各断面の底面の対応する二点で，非常に小さい値をもつだろう。しかるに，それらは断面の中心から周辺までは，棒の一端から他端までと同じぐらいのかなりの値の差をもち得るだろう。したがって，横方向での，または x と y の関数としての変形 s,σ の変化の法則を，**それらの z に関する導関数が零であるかのように**近似的に決定することができる。この仮説またはこの出発点は，われわれが取り掛かっている問題，そして引き伸ばされ，われわれが仮定しようとしている連続的にごくわずかの負荷を受ける棒に起こるものを決定する問題の記述の解析的な解釈のようなものに外ならない〔184—5頁〕。

この論法は，私には全く十分であるとは思われず，せいぜい**棒**にだけ適用できて，サン・ブナン問題の柱体には適用できない。しかし，それはやはり

理論的に示された最も優れた，かつ最も完全な〔190頁〕

方法であるかも知れない。

概して，本書の8—10節で述べた実験に訴えることが，さらに申し分ないことである。

〔319.〕 195—7頁の覚え書で，サン・ブナンは曲げの場合について，次の結果を証明している。

$$\int\widehat{zx}\,d\omega=\frac{d}{dz}\int\widehat{zz}\,x\,d\omega\ ;\ \int\widehat{zy}\,d\omega=\frac{d}{dz}\widehat{zz}\,y\,d\omega$$

ここで，z は柱体軸の方向の軸で，x，y は横断面の任意の直角軸であり，$d\omega$ は横断面内の面積要素である。これらの公式は解析的に次のことを表わしている。

ある断面について，**剪断力**または**ある**横方向の全接線力は，この方向に垂直な断面上に引いた直線の周りの**曲げモーメント**の，縦座標に関する導関数に等しいという，知られた，かつきわめて有用なこの定理〔197頁〕。

『ナヴィエの講義』の38—9頁参照。

〔320.〕 次に続く**覚え書**〔210—20頁〕は**ねじり**についての卓越した論文または補足的な論文の一部だけを再録している。本書1節，285節と291節参照。また，**覚え書**，240—2頁，は**ねじり**の第 XI 章からいくつかの結果を再録している。本書49節参照。

§37の終わりの**覚え書**〔252—82頁〕は適当な伸び条件によって，クレープシュの応力限度についての誤った仮定を訂正している。その内

容は**ねじり**についての論文と『**ナヴィエの講義**』から抜粋してある。本書5節(b)—(f)と180節参照。