

## <研究ノート>

# 離散的動学的最適化問題の経済学的意味

金 江 亮

## はじめに

[1] [2] は、マルクス経済学を現代の最適成長論の観点から取り扱ったものであり、[1] ではマルクス経済学のテキストということもあり、冒頭の商品論からも、効用最大化という最適化行動の観点で書かれている点の特徴である。

しかし、本学でもそうであるが、マルクス経済学は数学をあまり使わないということで、数学に苦手意識をもつ学生も多い。そのため、[1] の数学付録では、動学的最適化問題の解法をなるべく分かりやすく、経済学的意味を述べた。

だが、このテキストでは連続時間モデルが主題ということもあり、離散モデルや、それと連続モデルとの関連を十分に述べられなかった。そこで、本稿ではその部分と、経済学的意味を扱う。ただし、マルクス経済学への応用が目的のため、労働を唯一の本源的生産要素とするマルクスのモデルの下で説明する。ただしそうは言っても、ラムゼーモデルが最適成長論のベンチマークモデルであるように、通常の最適成長論のテキストを読む際には（たとえば [3]）、これくらいでも十分と思われる。

## 離散型モデル

離散型の、マルクスのな 2 部門最適成長モデルを考える。“マルクスの”

---

キーワード：最適成長モデル，動学的最適化，ラグランジアン

というのは、資本財・消費財の2部門であることと、労働が唯一の本源的生産要素ということからそう呼んでいる。具体的には以下の形である。

$$\max_{K_t^0, K_t^1, L_t^0, L_t^1 \geq 0} \sum_{t=0}^{\infty} (1+\rho)^{-t} U(Y_t)$$

$$s.t. \begin{cases} Y_t \leq F(K_t^0, L_t^0) \\ K_{t+1} - K_t \leq G(K_t^1, L_t^1) - \delta K_t \\ K_t^0 + K_t^1 \leq K_t \\ L_t^0 + L_t^1 \leq L \end{cases}$$

ここで、 $t$  期において、 $Y_t$  は消費手段、 $K_t$  は資本財、 $L$  は総労働を表す。また、 $F, G$  は一次同次であり、それぞれ消費財、資本財の生産関数である。

制約条件 s. t. 内の第1式は、消費財生産部門において、 $t$  期において資本  $K_t^0$ 、労働  $L_t^0$  を投入して消費財  $Y_t$  を得ることを表しており、第2式は、資本財部門において、 $t$  期において資本  $K_t^1$ 、労働  $L_t^1$  を投入して資本  $K_{t+1}$  を得ることを表しており、第3式は資本  $K_t$  を消費財生産部門へ  $K_t^0$ 、資本財生産部門へ  $K_t^1$  だけ配分することを表しており、第4式は総労働  $L$  を消費財生産部門へ  $L_t^0$ 、資本財生産部門へ  $L_t^1$  だけ配分することを表している。なお、この4式は不等式で書いてあるが、意味内容を分かりやすくするためでもあるが、実際上は等号で成立する。使用できるものは使用してしまう方が明らかに効率的だからである。

なお本モデルでは、 $t$  期において生産を行って生産物も  $t$  期に得られるものと設定している。これは計算結果を見やすくするためである。論者によっては、生産は  $t$  期に行うが、生産物は  $t+1$  期に得られるとしていることもあるので注意を要する。また、本モデルは資本財も生産に使われているが、それでも本源的生産要素は労働のみと考えられることは、参考文献 [1] [2] を参照のこと。

$\rho > 0$  は時間選好率、 $0 < \delta \leq 1$  は減価償却率を表す。 $Y_t, K_t, K_t^0, K_t^1, L_t^0, L_t^1$  は時刻  $t$  と共に変化する変数である。 $\rho, \delta$  は定数である。 $K_t^0, K_t^1, L_t^0, L_t^1$  は各時点で最適となるように経済主体が選択する変数（制御変

数) である。

$\sum_{t=0}^{\infty} (1+\rho)^{-t} U(Y_t)$  は目的関数であり、これを最大にすることが目標である。

この最適化問題を解くために、s. t. 内の制約条件をそれぞれ右辺に移項して

$$\begin{array}{ll} \text{消費財生産} & F(K_t^0, L_t^0) - Y_t \geq 0 \\ \text{資本蓄積} & G(K_t^1, L_t^1) + (1-\delta)K_t - K_{t+1} \geq 0 \\ \text{資本財資源制約} & K_t - K_t^0 - K_t^1 \geq 0 \\ \text{労働資源制約} & L - L_t^0 - L_t^1 \geq 0 \end{array}$$

にそれぞれラグランジュ乗数  $p_t^0$ ,  $p_t^1$ ,  $R_t$ ,  $w_t$  をかけて、目的関数に足し合わせたラグランジアン(H)を次のように定義する。

$$H = \sum_{t=0}^{\infty} (1+\rho)^{-t} \{ U(Y_t) + p_t^0 [F(K_t^0, L_t^0) - Y_t] + p_t^1 [G(K_t^1, L_t^1) + (1-\delta)K_t - K_{t+1}] + R_t [K_t - K_t^0 - K_t^1] + w_t [L - L_t^0 - L_t^1] \}$$

このラグランジュ乗数は、それぞれ経済学的な意味がある。それぞれ効用単位で測って、 $t$  期において、 $p_t^0$  は消費財 1 単位の価格、 $p_t^1$  は資本財 1 単位の価格、 $R_t$  は資本財のレンタル価格、 $w_t$  は労働の賃金率という経済学的意味がある。なお、ラグランジアンは  $L$  で表す方が自然だが、労働と混同するため  $H$  とした。

このラグランジアンを使えば、上で設定された制約条件付き最適化問題を制約条件という複雑な問題を、制約条件無しの最適化問題に変換することができるのである。すなわち、上記のラグランジアンの 1 階条件である

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial L_t^0} = \frac{\partial H}{\partial L_t^1} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial K_t^0} = \frac{\partial H}{\partial K_t^1} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial Y_t} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial K_{t+1}} = 0 \end{array} \right.$$

を考えればよい。厳密には難しいところがあるが、形式的には以下のように通常のラグランジュ乗数法と変わらない。このラグランジアン(L)は

$$\begin{aligned}
 H = & \dots + (1+\rho)^{-t} \{U(Y_t) + p_t^0 [F(K_t^0, L_t^0) - Y_t] + p_t^1 [G(K_t^1, L_t^1) \\
 & + (1-\delta)K_t - K_{t+1}] + R_t [K_t - K_t^0 - K_t^1] + w_t [L - L_t^0 - L_t^1]\} \\
 & + (1+\rho)^{-(t+1)} \{U(Y_{t+1}) + p_{t+1}^0 [F(K_{t+1}^0, L_{t+1}^0) - Y_{t+1}] + p_{t+1}^1 [G(K_{t+1}^1, L_{t+1}^1) \\
 & + (1-\delta)K_{t+1} - K_{t+2}] + R_{t+1} [K_{t+1} - K_{t+1}^0 - K_{t+1}^1] + w_{t+1} [L - L_{t+1}^0 - L_{t+1}^1]\} + \dots
 \end{aligned}$$

と書き換えられるので、その1階条件は

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial L_t^0} = \frac{\partial H}{\partial L_t^1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w_t = p_t^0 \frac{\partial F}{\partial L} = p_t^1 \frac{\partial G}{\partial L} \\ \frac{\partial H}{\partial K_t^0} = \frac{\partial H}{\partial K_t^1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_t = p_t^0 \frac{\partial F}{\partial K} = p_t^1 \frac{\partial G}{\partial K} \\ \frac{\partial H}{\partial Y_t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = p_t^0 \\ \frac{\partial H}{\partial K_{t+1}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+\rho)p_t^1 = R_{t+1} + p_{t+1}^1(1-\delta) \end{array} \right. \quad (1)$$

となる。

1階条件の第1式は、賃金率が消費財生産、資本財生産における労働の限界生産性と等しいことを示している。第2式は、資本のレンタル価格が、消費財生産、資本財生産における資本の限界生産性に等しいことを示している。第3式は、消費財価格が消費の限界効用に等しいことを示している。第4式は、 $t$ 期において $p_t^1$ 円を持っているとき、左辺は、利子率 $\rho$ で運用した場合の金額であり、右辺は、その $p_t^1$ 円で資本財1単位を購入してレンタルした場合の収益を表している。レンタルすると $t+1$ 期において $R_{t+1}$ 円を得られ、また所有する資本は $\delta$ だけ減価するので、1期後は $1-\delta$ 単位となり、価格では $p_{t+1}^1(1-\delta)$ 円である。この両者が等しいということは、この式は資本市場の裁定条件を意味している。

なお、解くだけなら不要であるが、ラグランジュ乗数での1階条件も経済学的な意味がある。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial p_t^0} = 0 \Leftrightarrow F(K_t^0, L_t^0) - Y_t = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial p_t^1} = 0 \Leftrightarrow G(K_t^1, L_t^1) + (1 - \delta)K_t - K_{t+1} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial R_t} = 0 \Leftrightarrow K_t - K_t^0 - K_t^1 = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial w_t} = 0 \Leftrightarrow L - L_t^0 - L_t^1 = 0 \end{array} \right.$$

直ちに分かるように、それぞれ元々の制約条件が出てくる。これが1階条件として出てくるのは、次のように考えると自然である。

ラグランジアンを見ると、消費財価格  $p_t^0$  が1円上昇したとき、消費財の余剰分  $F(K_t^0, L_t^0) - Y_t$  だけ経済全体の価値が増し、資本財価格  $p_t^1$  が1円上昇したとき、資本の余剰分  $G(K_t^1, L_t^1) + (1 - \delta)K_t - K_{t+1}$  だけ経済全体の価値が増し、資本財のレンタル価格  $R_t$  が1円上昇したとき、資本の不完全利用分  $K_t - K_t^0 - K_t^1$  だけ経済全体の価値が増し、労働の賃金率  $w_t$  が1円上昇したとき、労働の不完全利用分  $L - L_t^0 - L_t^1$  だけ経済全体の価値が増すことを表している。最適な経済状態ならば、余剰や不完全利用がないはずなので、ちょうど資源制約が等号で成り立っている。

なお、このことから、ラグランジアンは割引を考慮した上で、経済全体の価値、要するに効用単位で測った国民所得を無限期まで総計したものであると考えることができる。

### 連続モデルへの書き換え

次に、これに対応する連続型モデルを考えたい。それは、離散モデルの1期を限りなく短くとれば出てくるはずである。

そこで、1期を  $n$  等分することにする。すなわち、 $\frac{1}{n} = \Delta t$  期ごとに細かく分割して考える。このとき、1期当たりの割引率  $\rho$  は  $\frac{\rho}{n}$ 、減価償却率  $\delta$  は  $\frac{\delta}{n}$ 、消費から得られる効用  $U(Y_t)$  は  $\frac{U(Y_t)}{n}$  になり、

$$\max_{K_t^0, K_t^1, L_t^0, L_t^1 \geq 0} \sum_{t=0}^{\infty} (1 + \frac{\rho}{n})^{-nt} \frac{U(Y_t)}{n}$$

$$s.t. \begin{cases} Y_t \leq F(K_t^0, L_t^0) \\ K_{t+\Delta t} - K_t \leq G(K_t^1, L_t^1) - \frac{\delta}{n} K_t \quad (\text{step } \Delta t) \\ K_t^0 + K_t^1 \leq K_t \\ L_t^0 + L_t^1 \leq L \end{cases}$$

となる。

目的関数は,

$$\sum_{t=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\rho}{n}\right)^{-\frac{n}{\rho} \rho t} U(Y_t) \Delta t \text{ となり, } \Delta t \rightarrow 0 \text{ として } \int_0^{\infty} e^{-\rho t} U(Y_t) dt \text{ となる。}$$

ただし  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  を用いた。

s. t. 内第2式は,

$$K_{t+\Delta t} - K_t \leq G(K_t^1, L_t^1) - \delta \Delta t K_t$$

$$\frac{K_{t+\Delta t} - K_t}{\Delta t} \leq G(K_t^1, L_t^1) - \delta K_t$$

$\Delta t \rightarrow 0$  として  $\dot{K}_t \leq G(K_t^1, L_t^1) - \delta K_t$  となる。

すると結局, 以下のように書き直せる。

$$\max_{K_1, K_2, L_1, L_2 \geq 0} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} U(Y_t) dt$$

$$s.t. \begin{cases} Y_t \leq F(K_t^0, L_t^0) \\ \dot{K}_t \leq G(K_t^1, L_t^1) - \delta K_t \\ K_t^0 + K_t^1 \leq K_t \\ L_t^0 + L_t^1 \leq L \\ K_t^0, K_t^1, L_t^0, L_t^1 \geq 0 \end{cases}$$

1階条件も, 同様にして導き出せる。離散モデルの場合の1階条件(1)の4式のうち, 第1式から第3式はそのまま成り立つ。問題は第4式(資本市場の裁定条件)であり, これを変形する。

$(1 + \rho)p_t^1 = R_{t+1} + p_{t+1}^1(1 - \delta)$  を  $n$  等分すると

$$\left(1 + \frac{\rho}{n}\right) p_t^1 = \frac{R_{t+\Delta t}}{n} + p_{t+\Delta t}^1 \left(1 - \frac{\delta}{n}\right)$$

$$(1 + \rho \Delta t) p_t^1 = R_{t+\Delta t} \Delta t + p_{t+\Delta t}^1 (1 - \delta \Delta t)$$

$$\rho p_t^1 \Delta t = R_{t+\Delta t} \Delta t - p_{t+\Delta t}^1 \delta \Delta t + p_{t+\Delta t}^1 - p_t^1$$

$$\rho p_t^1 = R_{t+\Delta t} - p_{t+\Delta t}^1 \delta + \frac{p_{t+\Delta t}^1 - p_t^1}{\Delta t}$$

$\Delta t \rightarrow 0$  として

$$\rho p_t^1 = R_t - p_t^1 \delta + \dot{p}_t^1$$

この式は意味内容は本質的には離散モデルの場合と同じであるが、直接こう考えると分かりやすい。この式は資産市場の裁定条件を表している。いま、資産  $p_t^1$  円を運用したいとする。 $R_t - p_t^1 \delta + \dot{p}_t^1$  は、資本財 1 単位を購入し運用した場合の収益を表している。 $R_t$  は資本財のレンタル価格であり、 $p_t^1 \delta$  は減価償却分を効用単位で測ったものであり、 $\dot{p}_t^1$  はキャピタルゲイン（ロス）である。一方、 $\rho p_t^1$  は利子率  $\rho$  で運用した効用単位で測った収益を表している。どちらで運用しても収益は同じでなければならないことを意味している。

以上のように、離散モデルと連続モデルが自然とつながっていることが分かる。実は、連続モデルの場合はバンバン制御のような、時点で飛び飛びに制御変数を選択するようなこともあるのだが、経済学的にはこのように考えておけばよい。

## 参考文献

- [1] 『マルクス経済学 [第2版]』(大西広, 慶應義塾大学出版会, 2015年)
- [2] 『マルクス派最適成長論』(金江亮, 京都大学学術出版会, 2013年)
- [3] 『内生的経済成長論II [第2版]』(R. J. バロー/X. サラーイー・マーティン, 大住圭介訳, 九州大学出版会, 2006年)
- [4] 『経済学のための最適化理論入門』(西村清彦, 東京大学出版会, 1990年)
- [5] 『[続] ワルラシアンへのマイクロ経済学』(三土修平, 日本評論社, 2011年)