

## <研究ノート>

# 最適制御問題の経済学的解釈(1)

金 江 亮

## はじめに

拙稿[4]で、経済学における連続時間の動的最適化問題を離散的モデルからの自然な変形によって説明した。

最適制御自体は、もともと工学由来である。最近の自動車の自動運転はもちろん、飛行機のオートパイロット、ロケットの打ち上げ、家電製品に至るまでありとあらゆる分野に関わっている。工学と経済学は親近性があり、経済の制御もいわば一種の社会的な工学のようなものとも捉えられる。工学の場合、数学と違って、実際に解けることや、近似解を求めることが重要になってくる。単に解が存在するだけでは、製品を設計できないからである。そのため、実践的に解を求める手法がいろいろ考案されている。

その中で、非常に分かりやすく教育的な文献として加藤[2]がある。このテキストの4.9節 一般的定式化では、実用上のほとんどすべての問題に適用できるように、最適制御問題とその解法が定式化されている。

ただし、工学的な定式化のため、当然のことながら経済学の観点は入っていない。そこで本稿では、解法自体は加藤[2]に従い、式番号もそのままにするが、ところどころ計算の行間や経済学的な意味を補う。

## 一般的定式化

加藤[2]の4.9節の一般的定式化は以下のようにになっている。

---

キーワード：最適制御, ハミルトニアン, ラグランジアン, 最大原理, 変分法

運動が微分方程式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (4.136)$$

および代数方程式の付帯条件

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0 \quad (4.137)$$

で記述される系があり、状態量の初期値と終端値は

$$\mathbf{x}[\mathbf{x}(t_0), t_0] = 0 \quad (4.138)$$

$$\phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0 \quad (4.139)$$

と拘束されているものとする。このとき評価関数

$$J = \eta[\mathbf{x}(t_0), t_0] + \phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt$$

を停留させる制御入力  $\mathbf{u}(t)$  を見出せ。  $t_0$ ,  $t_f$  はいずれも自由とする。付帯条件や拘束条件は互いに矛盾しないことを仮定する。

なお太字の文字は列ベクトルである。  $\mathbf{x}$  は状態変数で  $\mathbf{u}$  は制御変数である。  $t_0$  は初期時点、  $t_f$  は終端時点で、初期時点・終端時点とも固定されておらず、それ自身が制御の対象である。ただし、拘束条件があり、それが (4.138) (4.139) である。

工学的なイメージとしては、たとえば飛行機を思い浮かべれば良い。評価関数は燃料の総消費量としよう。出発地点、終端地点は地形や建物環境により運動に制約がある。狭い、広い、強風、悪天候などで条件が拘束される。各時点での燃料の消費量は  $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  で、初期時点  $t_0$  から終端時点  $t_f$  までの消費量は  $\int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt$  だが、出発地点、終端地点は地形や建物環境により運動に制約がある。狭い、広い、強風、悪天候などで条件が拘束される。また、離発着は飛行中の燃料の消費とは違った消費があり、それが  $\eta[\mathbf{x}(t_0), t_0] + \phi[\mathbf{x}(t_f), t_f]$  である。一般的には飛行時間が短い方が燃料の消費量が少なくて済むが、あまりに急加速・急減速するとかえって燃料の消費量

が増えるかもしれない。だから、初期時点・終端時点ともに選択の余地がある。

もちろん、これは一例である。定式化自体は一般的だから、これ以外にもいくらでもイメージがありうる。単に飛行時間の最小化でもよい。

### 一般的定式化の解法

加藤[2]の面白い点は、実用上はポントリヤーギンの最大(最小)原理は不要で、変分法だけでよい、という点である。バンバン制御のような、制御変数がある時点で不連続に動く場合でも、変分法で解いた解をコンピュータで動かすと、実用上は問題ないシミュレーション解が得られる。

経済学、というより実務上の経済政策に最適制御理論を応用する場合も同様であろう。ここでもそれに従ってみる。以下は加藤[2]の引用に、一部表記を変えて、説明を追記した。(なお、文献[5]の数学付録も似た手法で説明している。)

ラグランジュ乗数  $\lambda(t)$ ,  $\rho(t)$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  を用い、評価関数  $J$  を次のように拡張する。

$$\begin{aligned} J^*(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, \rho, \mu, \nu) \\ = [\eta(\mathbf{x}, t) + \mu^T \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t)]_{t=t_0} + [\phi(\mathbf{x}, t) + \nu^T \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)]_{t=t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L^* dt \end{aligned} \quad (4.141)$$

ただし

$$L^* = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \lambda^T(t)(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}) + \rho^T(t)\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (4.142)$$

なお、太文字の右肩にある  $\mathbf{T}$  は転置を表す<sup>1)</sup>。

$J^*$  の第一変分を計算する。変分の影響を受ける独立の変数は  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $t_0$ ,  $t_f$  である。変分は  $\delta$  で表す。

1) なお、 $\rho$  は経済学では時間選好率を表すことが多いが、ここではそのような意味は無い。紛らわしいので本来なら別の文字にしたいが、加藤[2]のままにしてある。

一般に、関数  $y(x)$  の  $x = x_1$  における全微分と変分の関係は

$$dy(x_1) = \delta y(x_1) + y'(x_1) dx_1 \quad (2.26)$$

である。これは、全微分の  $d$  が、関数  $y$  そのものと、 $x_1$  の両方の変化の影響があると思えば理解しやすい。これから

$$\delta y(x_1) = dy(x_1) - y'(x_1) dx_1 \quad (2.27)$$

が得られるが、この関係を初期時点・終端視点に適用すると以下を得る。

$$\delta \mathbf{x}(t_0) = d\mathbf{x}(t_0) - \dot{\mathbf{x}}(t_0) dt_0 \quad (4.143)$$

$$\delta \mathbf{x}(t_f) = d\mathbf{x}(t_f) - \dot{\mathbf{x}}(t_f) dt_f \quad (4.144)$$

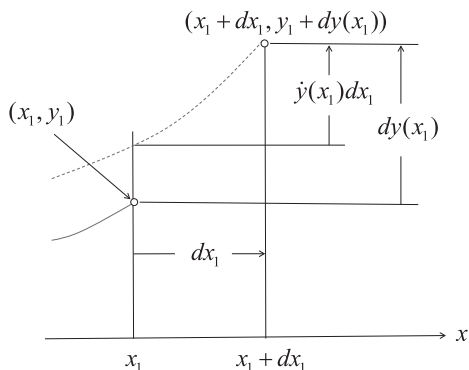


図 2.5  $dx_1, dy(x_1), \delta y(x_1)$  の関係  
(加藤[2]p. 29より作成)

この式を使って、第一変分を計算する。

$$\begin{aligned} \delta J^* = & \left[ \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_0} d\mathbf{x}(t_0) + \left[ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} \right]_{t=t_0} dt_0 + [\delta \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi}]_{t=t_0} \\ & + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} + \boldsymbol{\nu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_f} d\mathbf{x}(t_f) + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{\nu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t} \right]_{t=t_f} dt_f + [\delta \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{\psi}]_{t=t_f} \\ & + [L^*]_{t=t_f} dt_f - [L^*]_{t=t_0} dt_0 \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left( \left[ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \boldsymbol{\rho}^T(t) \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}} \right] \delta \mathbf{x} + \left[ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} + \boldsymbol{\rho}^T(t) \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{u}} \right] \delta \mathbf{u} \right. \\ & \left. - \boldsymbol{\lambda}^T(t) \delta \dot{\mathbf{x}} + \delta \boldsymbol{\lambda}^T(t) (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}) + \delta \boldsymbol{\rho}^T(t) \mathbf{C} \right) dt \end{aligned}$$

ここで

$$H = L + \lambda^T(t)\mathbf{f} + \rho^T(t)\mathbf{C}$$

とおく。これをハミルトニアンという。これを用いると、上記の積分記号の中の  $\delta \mathbf{x}$ ,  $\delta \mathbf{u}$  の直前の括弧の中はそれぞれ

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} + \lambda^T(t) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \rho^T(t) \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} + \lambda^T(t) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} + \rho^T(t) \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{u}}$$

と表せる。

また、部分積分の公式から、積分記号の中にある  $\lambda^T(t)\delta \dot{\mathbf{x}}$  の項は計算できる。変分  $\delta$  と微分は交換できることに注意して

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} (\lambda^T(t) \delta \dot{\mathbf{x}}) dt \\ &= [\lambda^T(t) \delta \mathbf{x}]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} (\dot{\lambda}^T(t) \delta \mathbf{x}) dt \\ &= [\lambda^T(t)]_{t=t_f} \delta \mathbf{x}(t_f) - [\lambda^T(t)]_{t=t_0} \delta \mathbf{x}(t_0) - \int_{t_0}^{t_f} (\dot{\lambda}^T(t) \delta \mathbf{x}) dt \\ &= [\lambda^T(t)]_{t=t_f} \delta \mathbf{x}(t_f) - [\lambda^T(t) \dot{\mathbf{x}}(t)]_{t=t_f} dt_f \\ &\quad - [\lambda^T(t)]_{t=t_0} \delta \mathbf{x}(t_0) + [\lambda^T(t) \dot{\mathbf{x}}(t)]_{t=t_0} dt_0 - \int_{t_0}^{t_f} (\dot{\lambda}^T(t) \delta \mathbf{x}) dt \end{aligned}$$

となるので、これらを用いて  $\delta J^*$  の式変形を進める。

$dt_0$  を含む項の係数は

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} - (L + \lambda^T(t)(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}) + \rho^T(t)\mathbf{C}) - \lambda^T(t) \dot{\mathbf{x}} \right]_{t=t_0} \\ &= \left[ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} - (L + \lambda^T(t)\mathbf{f} + \rho^T(t)\mathbf{C}) \right]_{t=t_0} \\ &= \left[ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} - H \right]_{t=t_0} \end{aligned}$$

$dt_f$  を含む項の係数は

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{\nu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t} + (L + \lambda^T(t)(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}) + \rho^T(t)\mathbf{C}) + \lambda^T(t) \dot{\mathbf{x}} \right]_{t=t_f} \\ &= \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{\nu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t} + (L + \lambda^T(t)\mathbf{f} + \rho^T(t)\mathbf{C}) \right]_{t=t_f} \end{aligned}$$

$$= \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{\nu}^T \frac{\partial \psi}{\partial t} + H \right]_{t=t_f}$$

よって

$$\begin{aligned} \delta J^* = & \left[ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} - H \right]_{t=t_0} dt_0 \\ & + \left[ \frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\lambda}^T \right]_{t=t_0} d\boldsymbol{x}(t_0) \\ & + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{\nu}^T \frac{\partial \psi}{\partial t} + H \right]_{t=t_f} dt_f \\ & + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\nu}^T \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\lambda}^T \right]_{t=t_f} d\boldsymbol{x}(t_f) \\ & + [\delta \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{x}]_{t=t_0} + [\delta \boldsymbol{\nu}^T \psi]_{t=t_f} \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\lambda}^T \right) \delta \boldsymbol{x} + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} \delta \boldsymbol{u} + \delta \boldsymbol{\lambda}^T(t) (\boldsymbol{f} - \dot{\boldsymbol{x}}) + \delta \boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{C} \right] dt \end{aligned} \quad (4.145)$$

となる。ここから、最適化の必要条件が以下のように得られる。

$$\text{随伴変数の微分方程式} \quad \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\lambda}^T = 0 \quad (4.147)$$

$$\text{制御入力の最適性の条件} \quad \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = 0 \quad (4.148)$$

$$\text{運動方程式} \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f} \quad (4.149)$$

$$\text{等式拘束条件} \quad \boldsymbol{C} = 0 \quad (4.150)$$

$$\text{初期拘束条件} \quad \boldsymbol{x}[\boldsymbol{x}(t_0), t_0] = 0 \quad (4.151)$$

$$\text{終端拘束条件} \quad \boldsymbol{\phi}[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] = 0 \quad (4.152)$$

$$\text{随伴変数初期条件} \quad \boldsymbol{\lambda}^T(t_0) = \left[ -\frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} \right]_{t=t_0} \quad (4.153)$$

$$\text{随伴変数終端条件} \quad \boldsymbol{\lambda}^T(t_f) = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\nu}^T \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{x}} \right]_{t=t_f} \quad (4.154)$$

$$\text{未知量 } t_0 \text{ に対する条件} \quad \left[ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} - H \right]_{t=t_0} = 0 \quad (4.155)$$

$$\text{未知量 } t_f \text{ に対する条件} \quad \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{\nu}^T \frac{\partial \psi}{\partial t} + H \right]_{t=t_f} = 0 \quad (4.156)$$

## 経済学的解釈

では、経済学の観点からはこれらの式はどのように解釈できるだろうか。ここでは、拙稿[4]に習って解釈してみる。状態変数  $\mathbf{x}$  を資本、制御変数  $\mathbf{u}$  を各部門への労働の配分と考える。 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  を資本財の生産関数とする。ここの  $\mathbf{f}$  は、減価償却部分も入っていると考える。一国で考えてみる。資本主義の成立時点を初期時点  $t_0$ 、次世代の経済体制、例えば全面的AI化や社会主義など、資本主義と質的に異なる経済体制が来る時点、すなわち資本主義の終端時点を  $t_f$  とし、評価関数  $J$  はその間の国民純生産  $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  の合計と思えばよい。また  $\eta[\mathbf{x}(t_0), t_0]$  と  $\phi[\mathbf{x}(t_f), t_f]$  はそれぞれ初期時点・終端時点における国の資産や負債の評価と思えばよい。本稿では、一国として考えるのを標準としてみる。

別な考え方としては、一個人を考えればよい。 $t_0$ 、 $t_f$  は、個人の生まれた時点と死ぬ時点とし、評価関数  $J$  はある一個人の生涯効用とする。瞬時的効用が  $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  で、資本財や労働によって生産された消費財から得られる効用と思えばよい。生まれた時点から死ぬ時点までのその総和が  $\int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt$  である。ただし、生まれた時点で親からの相続  $\eta[\mathbf{x}(t_0), t_0]$  と子への遺産  $\phi[\mathbf{x}(t_f), t_f]$  も生涯効用  $J$  には含まれる。さらに、これらは税引き後と思ってよい。 $t_0$ 、 $t_f$  は制御変数なので、生まれる時点と死ぬ時点を選択するのは不自然ではあるが、親・子・孫は共通の効用を持っていて、親が選ぶと思えばよい。

他の考え方として一企業とすることもできる。一企業の場合は、企業の設立を初期時点  $t_0$ 、企業の廃業・清算を終端時点  $t_f$  とし、評価関数  $J$  は会社の設立から清算までの総企業価値と思えばよい。また  $\eta[\mathbf{x}(t_0), t_0]$  と  $\phi[\mathbf{x}(t_f), t_f]$  はそれぞれ初期時点・終端時点における各種税引き後の資本金と思えばよい。

また代数方程式の付帯条件  $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0$  は、ストックでなく中間財（フロー）の資源制約式と思えばよい。

状態量の初期値と終端値はそれぞれ  $\mathbf{x}[\mathbf{x}(t_0), t_0] = 0$ 、 $\phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0$  で拘

束されるが、これらはそれぞれ、初期時点での資本量  $\mathbf{x}(t_0)$ 、終端時点での資本量  $\mathbf{x}(t_f)$  生産のための中間財生産とすることにする。これは分かりにくい、資本主義の誕生は無傷でなく、資本の原始蓄積  $\mathbf{x}(t_0)$  のために必要なコスト（囲い込み）のようなものをイメージすればよい。終端時点では、次世代の経済体制のための、やはり囲い込みのようなコスト、あるいは革命のコストのようなものと思ってもよい。資本主義という時代の始まりには特別なコストないし便益があるということである。ここでは単純に、資本主義の成立と終焉には中間財の生産に相当するものが必要である、と考えることにする。

ある時点において、瞬時的効用  $L$  だけを最大化するために資本財を過剰に使うと、その時点だけ効用が高くても、将来時点において資本財が過小になり、消費財の生産量が減って効用が下がり、生涯効用はむしろ減少してしまう。かといって、資本財の蓄積ばかり優先して消費財の消費が低いと、やはり生涯効用は低くなってしまふ。ちょうどよいバランスを取らなければならない。そのためには単にその時点の瞬時的効用だけでなく、将来時点の資本のことも考えなければならない。資本財はそれ自身、食べて効用を得られるわけではないが、それによって将来の消費財生産を増やす効果がある。よって、価値があるわけで、価格がつくはずである。

現時点の消費財から得られる効用や、資本財からの将来の消費財生産から得られる効用の増分を一元化して測るために、いわば効用単位で価格に換算したものがハミルトニアン  $H = L + \lambda^T(t)\mathbf{f} + \rho^T(t)\mathbf{C}$  である。これは一国というならば効用単位で測った国民純所得のことである。 $\lambda(t)$  は、効用単位の価格で測った資本財価格であり、 $\rho(t)$  は効用単位で測った中間財（フロー）の価格である。

$$J^*(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, \rho, \mu, \nu) \\ = [\eta(\mathbf{x}, t) + \mu^T \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t)]_{t=t_0} + [\phi(\mathbf{x}, t) + \nu^T \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)]_{t=t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L^* dt \quad (4.141)$$



$$L^* = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\rho}^T(t)\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (4.142)$$

も同じように解釈できる。 $\boldsymbol{\mu}$  は、初期時点の中間財  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}(t_0), t_0)$  の価格、 $\boldsymbol{\nu}$  は、終端時点の中間財  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(t_f), t_f)$  の価格である。 $\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}$  は生産超過分である。(4.142) は、資本財や中間財の生産超過・未使用部分がある場合は、それを市場価格  $\boldsymbol{\lambda}(t)$ 、 $\boldsymbol{\rho}(t)$  で売却し、それによる収益で効用を得るとしたものである。(4.141) は、それを初期時点、終端時点の中間財の生産超過・未使用部分も加え、それらの間のすべての時点において総計したものである。

なお、実際は最適な状態では資源は使い切るため、未使用な部分はない。

このとき、最適化の必要条件 (4.147)～(4.156) の経済学的意味は、それぞれ以下ようになる。

$$\text{随伴変数の微分方程式} \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T = 0 \quad (4.147)$$

この式は、資本財 1 単位を追加した場合に得られる国民純所得  $H$  の増分が、それによる資本財価格下落  $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$  と釣り合っていることを意味している。

$$\text{制御入力 of 最適性の条件} \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (4.148)$$

この式は、最適な状態では、労働配分を微量変えても変化がないことを意味している。山頂付近では山の高さが変わらない、水平である、ということ想像すればよい。

$$\text{運動方程式} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} \quad (4.149)$$

(4.145) では  $\delta \boldsymbol{\lambda}^T(t)(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})$  となっているが、 $\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}$  は生産超過分であった。 $\mathbf{f}$  は資本財の生産量で、 $\dot{\mathbf{x}}$  はそのうち、資本蓄積に回る分である。仮に一部未使用の部分を残すならば  $\mathbf{f} > \dot{\mathbf{x}}$  となる。その場合、資本財価格が  $\delta \boldsymbol{\lambda}(t)$  だけ変化した場合、効用は  $\delta \boldsymbol{\lambda}^T(t)(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})$  だけ変化する、ということの意味している。ただし、最適な状態では、変化がないはずである。また、

資本財生産分をすべて資本蓄積に回すのが合理的なので、等式で成り立つ。それが、(4.149)である。

$$\text{等式拘束条件} \quad \mathbf{C} = 0 \quad (4.150)$$

(4.145)では $\delta \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{C}$ となっているが、 $\mathbf{C}$ は中間財の生産量である。仮に一部未使用の部分を残すならば $\mathbf{C} > 0$ となる。その場合、中間財価格が $\delta \boldsymbol{\rho}$ だけ変化した場合、効用は $\delta \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{C}$ だけ変化する、ということの意味している。ただし、最適な状態では、変化がないはずである。また、中間財生産分をすべて使い切るのが合理的なので、等式で成り立つ。それが、(4.150)である。

$$\text{初期拘束条件} \quad \boldsymbol{\chi}[\mathbf{x}(t_0), t_0] = 0 \quad (4.151)$$

(4.145)では $[\delta \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi}]_{t=t_0}$ となっているが、 $[\boldsymbol{\chi}]_{t=t_0}$ は初期時点の中間財の生産量である。仮に一部未使用の部分を残すならば $[\boldsymbol{\chi}]_{t=t_0} > 0$ となる。その場合、中間財価格が $\delta \boldsymbol{\mu}$ だけ変化した場合、効用は $[\delta \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi}]_{t=t_0}$ だけ変化する、ということの意味している。ただし、最適な状態では、変化がないはずである。また、中間財生産分をすべて使い切るのが合理的なので、等式で成り立つ。それが、(4.151)である。

$$\text{終端拘束条件} \quad \boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0 \quad (4.152)$$

(4.145)では $[\delta \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{\psi}]_{t=t_f}$ となっているが、 $[\boldsymbol{\psi}]_{t=t_f}$ は終端時点の中間財の生産量である。仮に一部未使用の部分を残すならば $[\boldsymbol{\psi}]_{t=t_f} > 0$ となる。その場合、中間財価格が $\delta \boldsymbol{\nu}$ だけ変化した場合、効用は $[\delta \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{\psi}]_{t=t_f}$ だけ変化する、ということの意味している。ただし、最適な状態では、変化がないはずである。また、中間財生産分をすべて使い切るのが合理的なので、等式で成り立つ。それが、(4.151)である。

$$\text{随伴変数初期条件} \quad \boldsymbol{\lambda}^T(t_0) = \left[ -\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_0} \quad (4.153)$$

初期時点  $t_0$  において、資本財価格  $\lambda^T(t_0)$  は、資本量が限界1単位増加した場合の資産の増分  $\left[-\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}}\right]_{t=t_0}$  と、中間財の増分  $\left[-\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}\right]_{t=t_0}$  の価格換算  $\left[-\boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}\right]_{t=t_0}$  との合計と等しくなる。これは意味が分かりにくいのが、減少する場合を考えればよい。つまり、資本量が限界1単位減少した場合の資産の増分が  $\left[\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}}\right]_{t=t_0}$  であり、中間財の増分が  $\left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}\right]_{t=t_0}$  で、価格換算で  $\left[\boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}\right]_{t=t_0}$  で、その合計が資本財価格  $\lambda(t_0)$  に等しくなると考えるのである。初期資産が少ないほど、初期時点の資本財価格が高くなる。

あるいはこう思ってもよい。 $\left[\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}}\right]_{t=t_0}$  や  $\left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}\right]_{t=t_0}$  は負値でそれは初期時点、つまり資本主義が成立するのに要求される資本量（最低必要資本量）が大きくなればなるほど、資本主義成立にコストがかかることを意味している。資本の原始蓄積がより強力に要求されるほど、よりコストがかかる、と思えばイメージしやすい。

$$\text{随伴変数終端条件} \quad \lambda^T(t_f) = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} + \boldsymbol{\nu}^T \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_f} \quad (4.154)$$

終端時点において、資本量が限界1単位増加した場合の資産の増分が  $\left[\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}\right]_{t=t_f}$  であり、中間財の増分が  $\left[\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}}\right]_{t=t_f}$  で、価格換算では  $\left[\boldsymbol{\nu}^T \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}}\right]_{t=t_f}$  で、その合計が資本財価格  $\lambda^T(t_f)$  と等しい。終端時点において、最適状態では、資産として残しても、生産に回しても同じ価値になる、ということの意味している。

$$\text{未知量 } t_0 \text{ に対する条件} \quad \left[ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} - H \right]_{t=t_0} = 0 \quad (4.155)$$

(4.145) では  $\left[ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} - H \right]_{t=t_0} dt_0$  となっている。初期時点が  $dt_0$  だけ遅くなると、その間は生産が行われないため、生涯効用から国民純生産  $[H]_{t=t_0}$  だけ失われ、一方でその  $dt_0$  の微小時間の間に、初期時点の資産・中間財の価値は変化する。その合計が、最適状態では釣り合って0になることを意味している。

$$\text{未知量 } t_f \text{ に対する条件} \quad \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{\nu}^T \frac{\partial \psi}{\partial t} + H \right]_{t=t_f} = 0 \quad (4.156)$$

(4.145) では  $\left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}^T \frac{\partial \psi}{\partial t} + H \right]_{t=t_f} dt_f$  となっている。終端時点が  $dt_f$  だけ遅くなると、その間の分だけ生産が行われるため、生涯効用に国民純生産  $[H]_{t=t_f}$  だけ追加される、一方でその  $dt_f$  の微小時間の間に、終端時点の資産・中間財の価値は変化する。その合計が、最適状態では打ち消し合って 0 になることを意味している。

## まとめ

一般的定式化は、その名の通り一般的で、ロケットや飛行機、自動車など工学的問題でも、一国の経済や、一企業や一個人その他いろいろな問題に当てはまる。本稿では、その最適条件の経済学的な意味を与えることで、それが自然であることが分かった。

ただし、経済学的には、時点間で効用は割り引かれると考える方が自然である。本稿では、時間選好率を明示的には扱わなかった。実は、瞬時的効用  $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  に時間選好率が含まれていると解釈することも可能であるが、別扱いにした方が経済学的意味がよりはっきりする。またその他にも、ベルマンの最適性の原理からハミルトニアンを導出できるはずである。これは特に、確率制御を考える上で必要となる。これらは、次の機会としたい。

## 参考文献

- [1] 『マルクス経済学[第2版]』(大西広, 慶應義塾大学出版会, 2015年)
- [2] 『工学的最適制御』(加藤寛一郎, 東京大学出版会, 1988年)
- [3] 『マルクス派最適成長論』(金江亮, 京都大学学術出版会, 2013年)
- [4] 離散的動学的最適化問題の経済学的意味, 桃山学院大学経済経営論集第60巻第2号, pp. 79-85, 2018年
- [5] 『内生的経済成長論Ⅱ[第2版]』(R. J. バロー/X. サラ-イ-マーティン, 大住圭介訳, 九州大学出版会, 2006年)
- [6] 『経済学のための最適化理論入門』(西村清彦, 東京大学出版会, 1990年)

# Economic Interpretation of Solution of Optical Growth Model(1)

KANAE Ryo

## Abstract

In my previous articles [4], I explained dynamic optimization problem of continuous time by natural conversion from a discrete model from the economic perspective.

Optimal control itself is originally derived from engineering. For example, there are a lot of applications—the recent self-driving of cars, the autopilot of airplanes, rocket launches, consumer electronics. Engineering and economics have an affinity, and the control of the economy can be regarded as a kind of social engineering. In engineering, unlike mathematics, it is important to actually solve the problem and to find an approximate solution. Even if a solution exists, it is meaningless if an explicit solution cannot be calculated. For this reason, various methods have been devised to find solutions in practice.

Among them, Kato [2] treats a very clear solution method and has educational effects. In section 4.9 of Kato [2], the general formulation and solution of optimal control problem is designed to be applicable to almost all practical problems.

However, since it is an engineering formulation, it does not include the viewpoint of economics, as a matter of course. Therefore, in this paper, we will give economic viewpoint to this.

